Généralités sur les suites

Première Spécialité Mathématiques

L'équipe des professeurs de mathématiques
Lycée Stendhal

"Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est parce qu'ils ne savent pas à quel point la vie est compliquée "

J.Von Neumann (Mathématicien et physicien américano-hongrois)

Liste des savoirs et savoir-faire du chapitre :

CODES	INTITULES	Bilan		
		A	EA	NA
CH0401	Dans le cadre de l'étude d'une suite, utiliser le registre de la langue naturelle, le registre algébrique, le registre graphique, et passer de l'un à l'autre.			
CH0402	Proposer, modéliser une situation permettant de générer une suite de nombres. Déterminer une relation explicite ou une relation de récurrence pour une suite définie par un motif géométrique, par une question de dénombrement.			
CH0403	Calculer des termes d'une suite définie explicitement, par récurrence ou par un algorithme.			
Ch0404	Conjecturer, dans des cas simples, la limite éventuelle d'une suite.			

Compétences dans tous les chapitres :

INTITULE	Bilan		
	A	EA	NA
Chercher			
Modéliser			
Représenter			
Calculer			
Raisonner			
Communiquer			

GENERALITES SUR LES SUITES

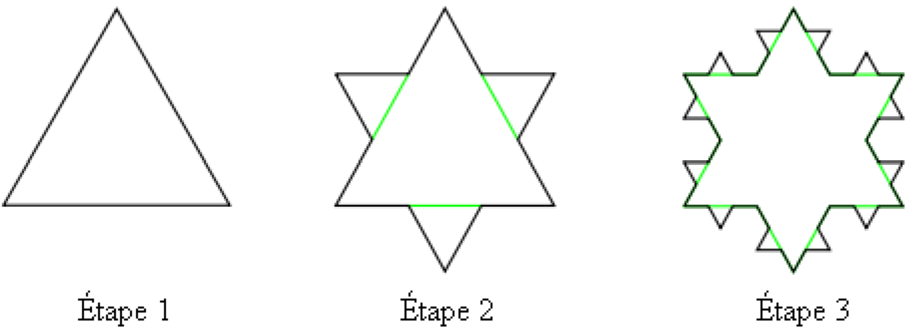
Lycée Stendhal • Première S• M Obaton

1. Définition et exemples

1.1. Activité d'introduction : Flocon de koch

Le flocon de Koch est l'une des premières fractales à avoir été décrite et elle a été inventée en 1904 par Helge Von Koch, mathématicien suédois. La première étape est de partir d'un triangle équilatéral. La deuxième étape est de couper les côtés du triangle en trois et de refaire un triangle équilatéral avec les ségments au milieu de chacun des côtés. La troisième étape est de recommencer la construction avec les nouveaux côtés obtenus, ... etc.

On obtient les étapes suivantes :



On note

C_n le nombre de côtés à l'étape n, P_n le périmétre de la figure à l'étape n et A_n l'aire de la figure à l'étape n.

1) Compléter le tableau ci-dessous

Etapes	Côtés	Périmètre	Surface
Etape	$C_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$P_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$A_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

3) Déterminer C_{n+1}, P_{n+1} et A_{n+1} en fonction respectivement de C_n, P_n et A_n

4) Construire une fonction Python, qui prend en entrée le nombre d'étape n et la longueur ℓ et qui return les valeurs de A_n et P_n.
Que se passe t-il lorsque n est de plus en plus grand ?

1.2. Définition

Définition 1 – Définition d'une suite

Une suite u est une application dont l'ensemble de départ est dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. On note n à la place de x et on note u_n son image à la place de $u(n)$ ou de $f(x)$.

$$u : n \longmapsto u_n$$

Vocabulaire :

➪ u_n est le terme de rang n de la suite u. (image de n par u)
➪ n est l'indice du terme u_n ou le rang du terme u_n ou l'emplacement du terme u_n.
➪ u_{n+1} est le terme de rang $n+1$ ou le terme suivant de u_n.
➪ u_{n-1} est le terme de rang $n-1$ ou le terme précédent de u_n.
➪ u_n est le terme de rang n.
➪ u ou (u) ou (u_n) ou $(u_{n\in\mathbb{N}}$ représente la suite tout entière.

⚠Il ne faut pas confondre u_{n+1} et $u_n + 1$ ⚠

⚠Il ne faut pas confondre u_n et (u_n) ⚠

Une suite est donc **une suite** de nombre :

$$u_p\,;\,u_{p+1}\,;\,\ldots\ldots u_{n-1}\,;\,u_n\,;\,u_{n+1}\,;\,\ldots\ldots$$

Exemple bien connu : (Suite de Fibonacci)

$$1\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,5\,;\,8\,;\,13\,;\,21\,;\,34\ldots$$

1.3. Exemples

Suivant la situation, le n peut représenter des années, des mois, des secondes, des étapes (comme dans l'activité), et plein d'autres situation indexées par des nombres entiers positifs.

Exemple 01 :
L'année 2000, la population d'une ville est de 5000 habitants.
Tous les ans, la population diminue de 2 % et 200 individus s'installent dans la ville.
On note u_n le nombre d'habitants l'année $2000+n$.

1) Déterminer u_0, u_1 et u_2

2) Que représente u_{n+1} ? Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

3) En déduire le nombre d'habitants en 2005.

4) En étudiant la population, un scientifique, nous dit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 10000 - 5000 \times 0,98^n$$

.
Qu'en pensez-vous ?

5) Calculer le nombre d'habitants l'année 2020.

Une suite peut-être définie de deux façons différentes :

Définition 2 – Définition explicite d'une suite

(Définition explicite des termes) :
Les termes u_n sont définis en fonction de n seulement.
Exemples :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 3n - 1$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n+1}{n^2}$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $u_n = \sqrt{n-2}$

Définition 3 – Définition par récurrence d'une suite

(Définition par récurrence des termes) :
Les termes u_n sont définis en fonction d'un ou de plusieurs termes précédents.
Exemples :

1. $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 3 \times u_{n-1}$
2. $u_1 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3 + u_n$
3. $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

2. Termes d'une suite

2.1. Calcul algébrique

Calculer les termes demandés des suites ci-dessous :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 3n - 1$ (4 premiers termes)

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n+1}{n^2}$ (4 premiers termes)

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $u_n = \sqrt{n-2}$ (4 premiers termes)

4. $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 3 \times u_{n-1}$ (4 premiers termes)

5. $u_1 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3 + u_n$ (4 premiers termes)

6. $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = n \times u_n$ (4 premiers termes)

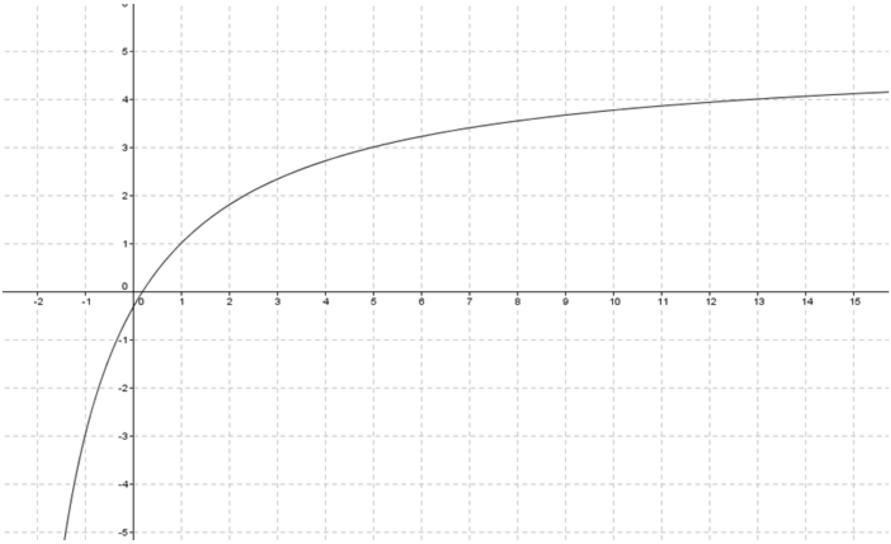
7. $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $b_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ (3 premiers termes)

2.2. Détermination graphique

Représenter graphiquement les suites ci-dessous. On fera apparaître les termes sur l'axe des abscisses.

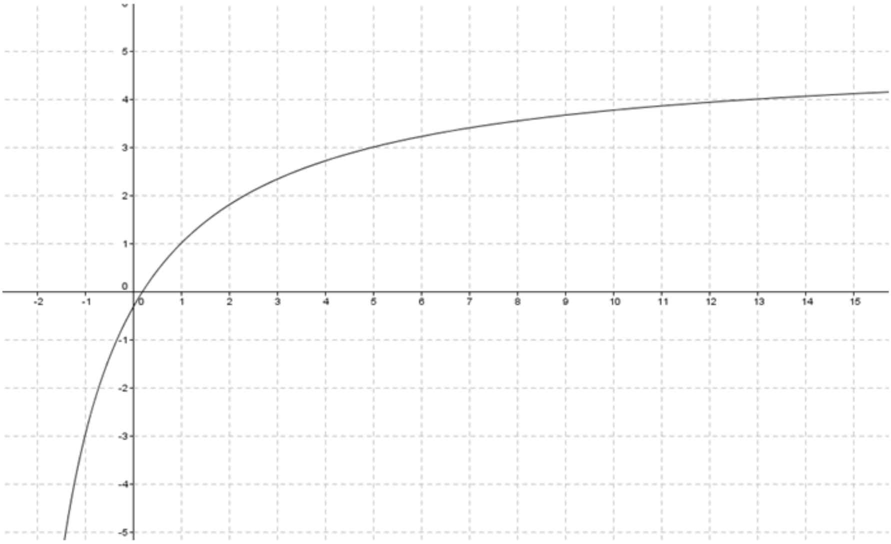
1. Formule explicite : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{5n-1}{3+n}$

   La courbe représentative ci-dessous est celle de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{5x-1}{3+x}$



2. Formule par récurrence : $u_0 = 12$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{3+u_n}$

   La courbe représentative ci-dessous est celle de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{5x-1}{3+x}$



2.3. Algorithmes importants

1. **Algorithme pour afficher tous les termes d'une suite jusqu'au rang N.**
   On souhaite afficher les N premiers termes de la suite définie par récurrence par

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3 \times u_n + 5$$

Algorithme 1	
$U \leftarrow 1$	
Afficher U	
Demander la valeur de N	
Traitement :	
Pour I allant de 1 à N	Faire
	$U \leftarrow 3 \times U + 5$
	Afficher U
Fin du Pour	

2. **Algorithme pour afficher le terme de rang N.**
   On souhaite afficher le terme de rang N de la suite définie par récurrence par

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3 \times u_n + 5$$

Algorithme 2	
$U \leftarrow 1$	
Demander la valeur de N	
Traitement :	
Pour I allant de 1 à N	Faire
	$U \leftarrow 3 \times U + 5$
Fin du Pour	
Sortie :	
	Afficher la valeur de U.

3. **Algorithme de seuil.**
   On veut savoir à partir de quel rang n, $u_n = n^2 + n + 1$ est supérieur à A, où A est un nombre que l'on va donner au début.

Algorithme 3	Algorithme du seuil
Donner la valeur de A	
$N \leftarrow 0$	
$U \leftarrow N^2 + N + 1$	
Traitement :	
Tant que $U \leq A$	Faire
	$N \leftarrow N + 1$
	$U \leftarrow N^2 + N + 1$
Fin du Tant que	
Sortie :	
	Afficher la valeur de N.

3. Variation d'une suite

3.1. Suite croissante, suite décroissante et suite monotone

Définition 4 – Suite croissante ou strictement croissante

➪ Une suite est croissante à partir d'un rang p si pour tout $n \geq p$,

$$u_{n+1} \geq u_n$$

➪ Une suite est strictement croissante à partir d'un rang p si pour tout $n \geq p$,

$$u_{n+1} > u_n$$

Définition 5 – Suite décroissante ou strictement décroissante

➪ Une suite est décroissante à partir d'un rang p si pour tout $n \geq p$,

$$u_{n+1} \leq u_n$$

➪ Une suite est strictement décroissante à partir d'un rang p si pour tout $n \geq p$,

$$u_{n+1} < u_n$$

3.2. Méthodes de détermination des variations

Propriété 1 – Etude des variations d'une suite

1. (u_n) est croissante à partir du rang $p \Leftrightarrow$ Pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$
2. (u_n) est décroissante à partir du rang $p \Leftrightarrow$ Pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$
3. (u_n) est stri croissante à partir du rang $p \Leftrightarrow$ Pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n > 0$
4. (u_n) est stri décroissante à partir du rang $p \Leftrightarrow$ Pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n < 0$

Démonstration :

Propriété 2 – Etude des variations d'une suite

1. (u_n) est croissante à partir du rang $p \Leftrightarrow$ Pour tout $n \geq p$, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$
2. (u_n) est décroissante à partir du rang $p \Leftrightarrow$ Pour tout $n \geq p$, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$
3. (u_n) est croissante à partir du rang $p \Leftrightarrow$ Pour tout $n \geq p$, $u_n < 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$
4. (u_n) est décroissante à partir du rang $p \Leftrightarrow$ Pour tout $n \geq p$, $u_n < 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$
5. (u_n) est stri croissante à partir du rang $p \Leftrightarrow$ Pour tout $n \geq p$, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$
6. (u_n) est stri décroissante à partir du rang $p \Leftrightarrow$ Pour tout $n \geq p$, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$
7. (u_n) est stri croissante à partir du rang $p \Leftrightarrow$ Pour tout $n \geq p$, $u_n < 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$
8. (u_n) est stri décroissante à partir du rang $p \Leftrightarrow$ Pour tout $n \geq p$, $u_n < 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

Démonstration :

Exemple d'étude de variation :
On note (u_n) la suite définie par : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 2n + 3$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left[(n+1)^2 - 2(n+1) + 3\right] - \left(n^2 - 2n + 3\right) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 3 - n^2 - 2n - 3 \\ &= -2n - 1 \end{aligned}$$

or $-2n - 1 > 0 \Leftrightarrow -1 > 2n \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < n$
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est strictement croissante à partir du rang 1.