Les fonctions dérivées.

Classe de première

Cours de Vincent Obaton

« Les **mathématiques** sont un outil que l'esprit de l'homme ne cesse de construire et de perfectionner afin de comprendre le monde.. »

Jean-Michel Bony, mathématicien français né en 1942.

Liste des savoirs et savoir-faire du chapitre :

CODES	INTITULES	Bilan		
		A	EA	NA
CH0301	Calculer un taux de variation et la pente d'une sécante.			
CH0302	Interpréter le nombre dérivé en contexte : pente d'une tangente, vitesse instantanée, coût marginal…			
CH0303	Déterminer graphiquement un nombre dérivé par la pente de la tangente. Construire la tangente en un point à une courbe représentative connaissant le nombre dérivé.			
Ch0304	Déterminer l'équation de la tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction.			
Ch0305	À partir de la définition, calculer le nombre dérivé en un point ou la fonction dérivée de la fonction carré, de la fonction inverse.			
Ch0306	Dans des cas simples, calculer une fonction dérivée en utilisant les propriétés des opérations sur les fonctions dérivables.			

Compétences dans tous les chapitres :

INTITULE	Bilan		
	A	EA	NA
Chercher			
Modéliser			
Représenter			
Calculer			
Raisonner			
Communiquer			

LES FONCTIONS DERIVEES.

Lycée Stendhal • Classe de première• Vincent Obaton

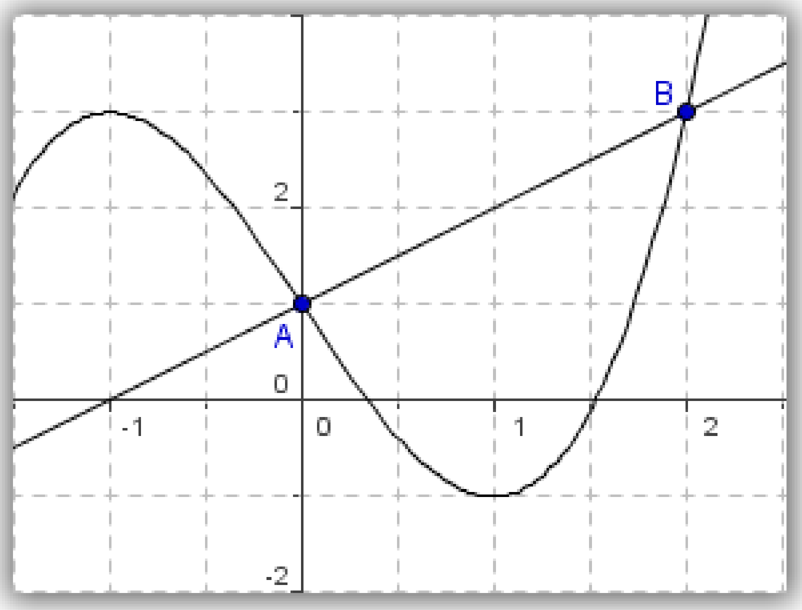
1. Objectifs

L'objectif de ce chapitre est de découvrir de nouveaux outils mathématiques qui se nomment **les nombres dérivées** et **les fonctions dérivées**. Comprendre ces notions, ces outils, savoir les manipuler pour maîtriser leurs applications dans les mathématiques, les sciences physiques-chimies, les sciences de la vie et de la Terre ainsi qu'en économie.

2. Courbes d'une fonction et droites

2.1. Equation de droite

Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
On note A et B deux points, différents, de la courbe $\mathscr{C}_f$



Calculons l'équation de la droite (AB).
L'équation de la droite (AB) est de la forme $y = mx + p$ avec m le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.
➠ Calculons m :
$m =$

➠ Calculons p :

On sait que $A \in (AB)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation $y = mx + p$
$p =$

Conclusion :

L'équation de la droite (AB) est :

$y =$

Cette formule n'est pas à apprendre par coeur.

2.2. Exemples

1. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-3)^2 + 1$
   On note A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 2 et B le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse -1
   Calculer l'équation de la droite (AB).

2. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{-3x+1}{x^2}$
   On note A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 2 et B le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse -1
   Calculer l'équation de la droite (AB).

2.3. Taux de variation ou d'accroissement

On nomme f une fonction définie sur I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$
On nomme A et B deux points de $\mathscr{C}_f$
Vocabulaire :

On note **taux de variation de f entre x_A et x_B** le rapport :
$$\tau_{[A,B]}(f) = \frac{f(x_A) - f(x_B)}{x_A - x_B}$$

Remarque : Le taux de variation de f entre x_A et x_B est aussi le coefficient directeur de la droite (AB).

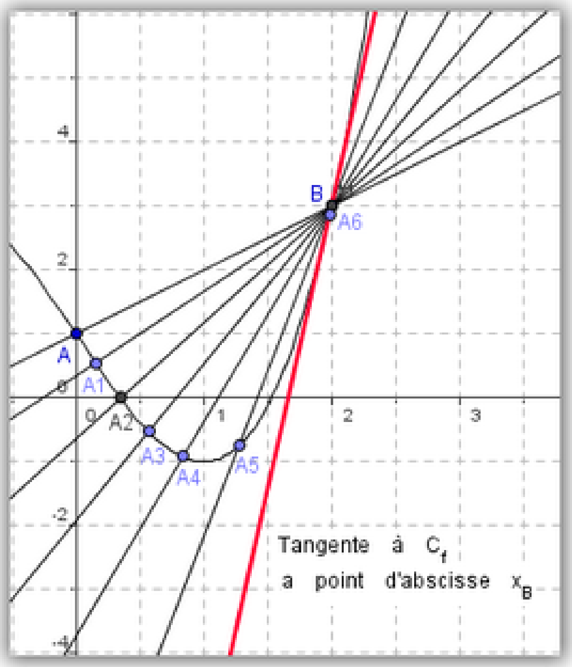
Exemples

1. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 6x + 7$
   Calculer le taux de variation de f entre 3 et -2.

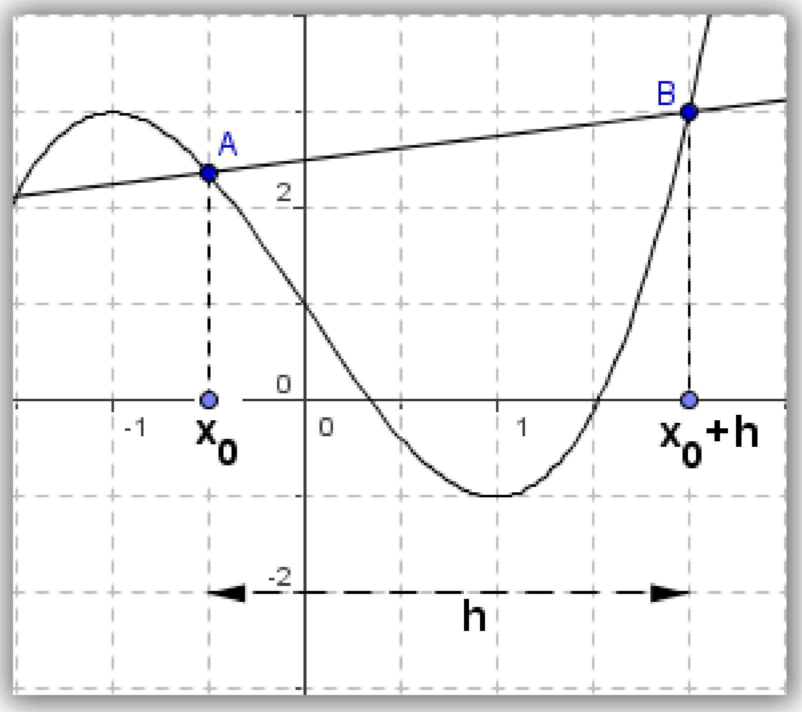
2. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x+3}{(x-1)^2}$
   Calculer le taux de vaiation de f entre -3 et -1.

3. Le nombre dérivé

On cherche maintenant à savoir ce qui se passe si on rapproche le point A vers le B jusqu'à ce qu'ils se superposent.



On remarque que lorsqu'on rapproche A de B la droite (AB) se rapproche de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_B.
Lorsque A est très très proche de B alors la droite (AB) est confondue avec la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_B.
Comment traduire cela de façon mathématiques ?



Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_A est le taux de variation de f entre x_A et x_B lorsque B se rapproche de A.
On note $x_B = x_A + h$ l'abscisse du point B.
Pour traduire que le point B est tout proche de A on va donc dire que h tend vers 0. (car si h tend vers 0 alors x_B tend vers x_A). Il faut donc calculer le taux de variation de f entre $x_A + h$ et x_A lorsque h tend vers 0.
Or

$$\tau_{[x_B+h,x_B]}(f) = \frac{f(x_A+h)-f(x_A)}{x_A+h-x_A} = \frac{f(x_A+h)-f(x_A)}{h}$$

On traduit donc de la façon suivante :
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_B est :

$$df(x_A) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h}$$

On nomme ce coefficient directeur **le nombre dérivé de f en x_B**

3.1. Définition

Définition du nombre dérivé de f en x_B :

Si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h}$ existe et est un nombre réel alors

on dira que f est dérivable en x_A et

on nomme **nombre dérivé de f en x_A** le nombre :

$$df(x_A) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h}$$

3.2. Exemples

On note f, g et h les trois fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto x^2 \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

$$g : x \mapsto \frac{1}{x} \text{ définie sur } \mathbb{R}^*$$

$$h : x \mapsto \sqrt{x} \text{ définie sur } \mathbb{R}^+$$

1. Calculer $df(2)$

2. Calculer $dg(-1)$

3. Calculer $dh(3)$

4. La fonction h est elle dérivable en 0 ?

3.3. Tangente à une courbe en un point

Equation de la tangente à une courbe en un point

Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On note A un point de la courbe $\mathscr{C}_f$.
On cherche à connaître l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_A.
On sait que l'équation est de la forme $y = mx + p$ avec :
$m =$

et $p =$

donc l'équation est $y =$

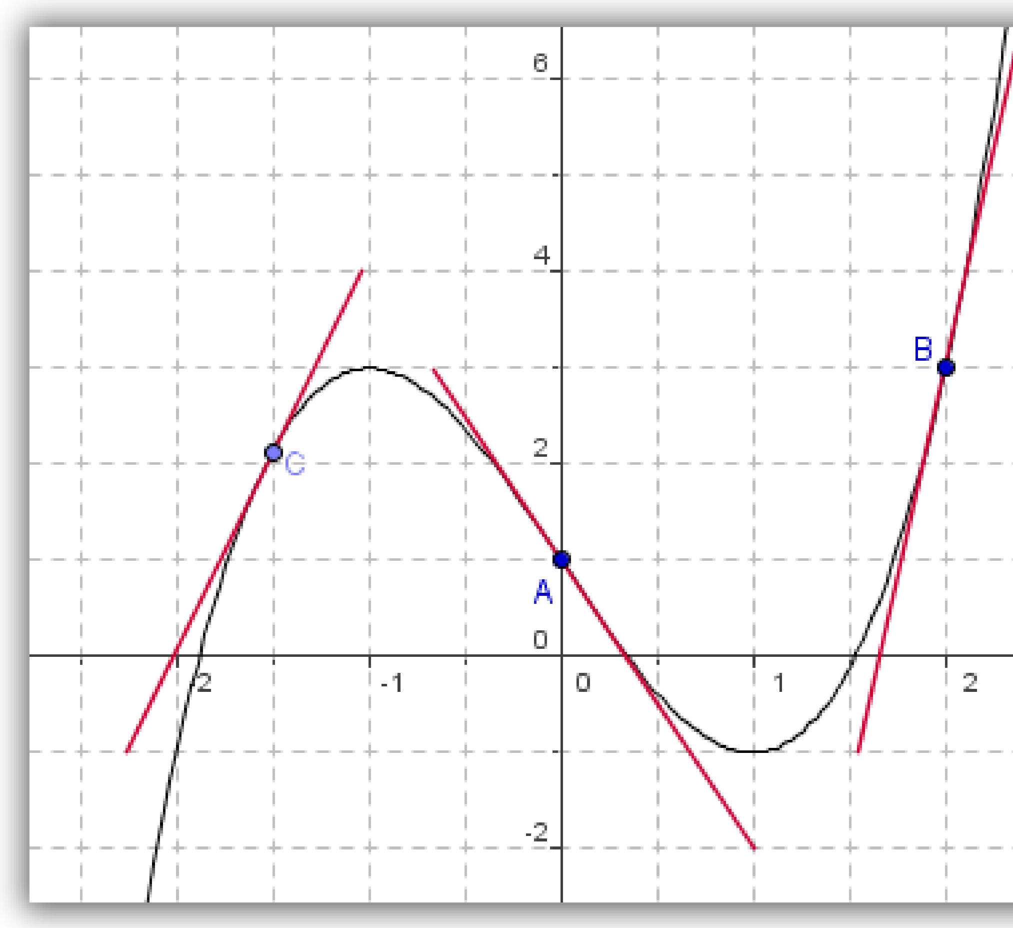
> L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_A est :
> $$y = df(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$$

Exemples

➠ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
On souhaite calculer l'équation de (D) la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 = 2$.
➠ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

On souhaite calculer l'équation de (D) la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 = 3$.

3.4. Coefficient directeur des tangentes et variations de la fonction



On remarque qu'il y a un lien entre le signe du coefficient directeur des tangentes et les variations de la fonction f.
Sur la figure ci-dessus, on remarque que :
➠ Si la fonction est décroissante sur I alors le coefficient directeur des tangentes aux points d'abscisse dans I est négatif.
➠ Si la fonction est croissante sur I alors le coefficient directeur des tangentes aux points d'abscisse dans I est positif.

Théorème :

f **est décroissante sur** I **et dérivable sur** I équivaut à $\forall x_0 \in I$ **on a** $df(x_0) \leq 0$
f **est croissante sur** I **et dérivable sur** I équivaut à $\forall x_0 \in I$ **on a** $df(x_0) \geq 0$

Démonstration (Les réciproques sont à admettre) :
On note f une fonction dérivable sur I, h un nombre positif et $x_0 \in I$ un nombre tel que $x_0 + h \in I$ et $x_0 \in I$.

$$df(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

On voit donc que le signe du nombre dérivé est très important pour étudier les variations d'une fonction.
Mais nous n'allons pas nous amuser à calculer le nombre dérivé en tous les points de l'ensemble de définition car nous allons y passer trop temps.
Nous allons donc construire des fonctions qui à x associe le nombre dérivé de f en x.
On nommera cette fonction **la fonction dérivée de** f.

4. Les fonctions dérivées

Soit f une fonction définie sur I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

4.1. Définition

$\forall x \in I$ tels que $df(x)$ existe, on nomme **fonction dérivée de f**

la fonction $f' : x \mapsto df(x)$

Attention l'ensemble de définition de f n'est pas toujours le même que l'ensemble de dérivabilité (ensemble de définition de f').
<u>Vocabulaire</u>
Lorsque $df(x)$ existe on dit que f est dérivable en x et si $df(x)$ existe $\forall x \in I$ on dit que f est dérivable sur I.

4.2. Fonctions usuelles

Étudions la fonction dérivée des fonctions de références.

La fonction carrée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x$

<u>Démonstration</u> :

Maintenant pour calculer le nombre dérivé de la fonction carré en $x = 3$, il suffit de faire : $f'(3) = 2 \times 3 = 6$

La fonction inverse

> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$
>
> alors $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Démonstration :

Maintenant pour calculer le nombre dérivé de la fonction inverse en $x = 3$, il suffit de faire : $f'(3) = 2 - \dfrac{1}{3^2} = -\dfrac{1}{9}$

La fonction racine carrée

> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$
>
> alors $\forall x \in \mathbb{R}^*_+ \quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Démonstration :

Maintenant pour calculer le nombre dérivé de la fonction racine carrée en $x = 3$, il suffit de faire : $f'(3) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

Les fonctions affines

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$

alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = a$

<u>Démonstration</u> :

Maintenant pour calculer le nombre dérivé de la fonction affine $f(x) = 3x - 5$ en $x = -1$, il suffit de faire : $f'(-1) = 3$

Résumé

On ne vas pas faire les calculs pour toutes les fonctions mais il va falloir retenir les formules ci-dessous :

Fonctions	Fonctions dérivées
$f(x) = k$ définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$ définie sur $\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$ définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = a$ définie sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$ définie sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$

Dans le cas général des fonctions de référence : On note n un entier naturel : $n \in \mathbb{N}$

Fonctions	Fonctions dérivées
$f(x) = x^n$ définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$ définie sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ définie sur $\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$
$f(x) = \cos(x)$ définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$ définie sur $\mathbb{R}$

Exemples :

1. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5$

2. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

4.3. Somme, Produit, inverse et quotient

Essayons maintenant de trouver des formules pour dériver des sommes de fonctions, des différences de fonctions, des produits de fonctions et des quotients de fonctions.
Voilà quelques formules à connaître et à savoir appliquer :
On note u et v deux fonctions définies sur le même intervalle I.

Fonctions	Fonctions dérivées
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = u(x) - v(x)$	$f'(x) = u'(x) - v'(x)$
$f(x) = u(x) \times v(x)$	$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$f(x) = \dfrac{1}{v(x)}$	$f'(x) = \dfrac{-v'(x)}{v^2(x)}$
$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
$f(x) = u(ax+b)$	$f'(x) = au'(ax+b)$

Exercice : Démontrer les formules ci-dessus.

Exemples

Trouver la dérivée des fonctions ci-dessous :

$$f(x) = 4x^5 - 3x^2 + 6x - 7 \qquad g(x) = \frac{1}{2x-3} \qquad h(x) = \frac{3x-5}{2x+3} \qquad k(x) = \sqrt{5-4x}$$

5. Exemples et applications

5.1. Dérivabilité de la fonction racine carré

5.2. Dérivabilité de la fonction valeur absolue

Vitesse moyenne et vitesse instantanée

Vitesse moyenne

La vitesse moyenne est la vitesse du mobile entre un instant t_1 et un instant t_2.
Elle est donnée par la formule :

$$\boxed{V_{\text{moyenne}}[t_1,t_2] = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1}}$$

C'est le taux de variation de la fonction d entre t_1 et t_2

Exemple :
On suppose que la distance d'un mobile en fonction du temps est donnée par la fonction : $d(t) = 50t^2$ ou d est en km et t en h
Calculons la vitesse moyenne du mobile entre $t = 1\ h$ et $t = 2\ h$.
On sait que la distance parcourue est donnée par la fonction $d(t) = 50t^2$, donc :
$V_{\text{moyenne}}[1,2] = \dfrac{d(2)-d(1)}{2-1} = \dfrac{200-50}{1} = 150\ \text{km/h}$

Vitesse instantanée

La vitesse instantanée est la vitesse du mobile à l'instant t_1.
Cela revient donc à faire tendre t_2 vers t_1 dans la formule de la vitesse moyenne et donc d'arriver à la formule suivante :

Si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{d(t_1+h)-d(t_1)}{h}$ existe et est un réel unique alors :

$$\boxed{V(t_1) = \lim_{h\to 0} \frac{d(t_1+h)-d(t_1)}{h} = d'(t_1)}$$

C'est le nombre dérivé en t_1 de la fonction d

Exemple :
On suppose que la distance d'un mobile en fonction du temps est donnée par la fonction : $d(t) = 50t^2$ ou d est en km et t en h
Calculons la vitesse instantanée du mobile à l'instant $t = 1\ h$.
d est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $V(t) = d'(t) = 100t$
Donc $V(1) = 100 \times 1 = 100\ \text{km/h}$.

Accélération moyenne et accélération instantanée

Accélération moyenne

L'accélération moyenne est l'accélération du mobile entre un instant t_1 et un instant t_2.
Elle est donnée par la formule :

$$\boxed{A_{\text{moyenne}}[t_1,t_2] = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(t_2)-V(t_1)}{t_2-t_1}}$$

C'est le taux de variation de la fonction V entre t_1 et t_2

Exemple :
On suppose que la distance d'un mobile en fonction du temps est donnée par la fonction : $d(t) = 50t^2$ ou d est en km et t en h
Calculons l'accélération moyenne du mobile entre $t = 1\ h$ et $t = 2\ h$.
On sait que la vitesse instantanée est donnée par la fonction $V(t) = 100t$, donc :
$A_{\text{moyenne}}[1,2] = \dfrac{V(2) - V(1)}{2-1} = \dfrac{200-100}{1} = 100\ km/h^2$
<u>Accélération instantanée</u>
L'accélération instantanée est l'accélération du mobile à l'instant t_1.
Cela revient donc à faire tendre t_2 vers t_1 dans la formule de l'accélération moyenne et donc d'arriver à la formule suivante :

$$\text{Si } \lim_{h\to 0} \frac{V(t_1+h) - V(t_1)}{h} \text{ existe et est un réel unique alors :}$$
$$\boxed{A(t_1) = \lim_{h\to 0} \frac{V(t_1+h) - V(t_1)}{h} = V'(t_1)}$$

C'est le nombre dérivé en t_1 de la fonction V

Exemple :
On suppose que la distance d'un mobile en fonction du temps est donnée par la fonction : $d(t) = 50t^2$ ou d est en km et t en h
On sait que la vitesse instantanée est donnée par la fonction $V(t) = 100t$, donc :
Calculons l'accélération instantanée du mobile à l'instant $t = 1\ h$.
V est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $V'(t) = 100$ donc $A(1) = V'(1) = 100\ km/h^2$

5.3. Elasticité de la demande en fonction du prix

Rappel sur le taux d'accroissement :
Soit a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$.
Le taux d'accroissement entre a et b est le nombre réel t défini par : $t = \dfrac{b-a}{a}$
En économie, la sensibilité de la demande par rapport au prix se mesure grace a

l'elasticité :
L'élasticité de la demande par rapport au prix est le rapport entre le taux d'accroissement de la demande par rapport au taux d'accroissement du prix.
Supposons que l'on arrive à traduire la demande d'un produit en fonction se son prix unitaire par une fonction $f : p \to f(p)$
p représente le prix unitaire d'un produit et $f(p)$ la demande pour ce produit en fonction du prix p.
On note e l'élasticité de la demande par rapport au prix entre p_1 et p_2 , et par définintion on a :

$$\frac{\dfrac{f(p_2)-f(p_1)}{f(p_1)}}{\dfrac{p_2-p_1}{p_1}}$$

Si le prix p varie de 1 % alors la demande varie de e %
Supposons que le prix varie d'une petite quantité et donc que $p_2 = p_1 + h$ avec h un nombre proche de 0, alors on obtient :

$$\frac{\dfrac{f(p_1+h)-f(p_1)}{f(p_1)}}{\dfrac{p_1+h-p_1}{p_1}} = \frac{f(p_1+h)-f(p_1)}{f(p_1)} \times \frac{p_1}{h} = \frac{f(p_1+h)-f(p_1)}{h} \times \frac{p_1}{f(p_1)}$$

Si f est dérivable en p_1 et si on fait tendre h vers 0 alors on obtient :

$$\boxed{e(p_1) = \frac{p_1 f'(p_1)}{f(p_1)}}$$

Exemples :
La fonction suivante donne l'expression de la demande D d'un produit en fonction de son prix unitaire p :

$$D(p) = 100 - 5p + \frac{200}{2p+5}$$

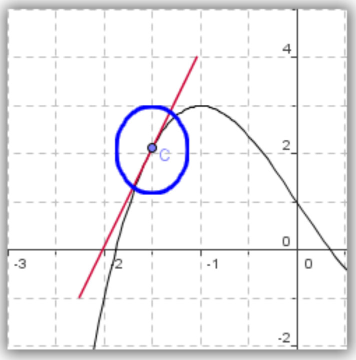
Calculons l'élasticité pour $p = 10$ euros.
D est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}\}$
On note
➠ $u : p \mapsto 100 - 5p$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(p) = -5$
et
➠ $v : p \mapsto \dfrac{200}{2p+5}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}\}$ avec $v'(p) = -\dfrac{400}{(2p+5)^2}$
D est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}\}$ et $D'(p) = -5 - \dfrac{400}{(2p+5)^2}$
D'après la formule de l'élasticité, on a :

$$e(10) = \frac{10D'(10)}{D(10)}$$

Or $D'(10) = -5 - \dfrac{400}{25^2} = -5 - \dfrac{400}{625} = -5,64$
et $D(10) = 100 - 50 + \dfrac{200}{25} = 50 + 8 = 58$
Donc $e(10) = \dfrac{10 \times (-5,64)}{58} \approx 0.97$
donc pour un prix proche de 10 euros, si le prix varie de 1 % alors la demande varie de 0,97 %.

6. Approximation affine d'une fonction en un point

Un approximation affine est une approximation d'une fonction par une application affine.
Proche d'un point, on cherche une application affine $mx + p$ qui est environ égal à $f(x)$.



On sait déjà qu'au alentour d'un point, la courbe et la tangente à la courbe en ce point, sont très proche.
Définition : On note f une fonction dérivable sur I et $a \in I$

> Pour tout $a \in I$, on dit que la fonction $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$
>
> est une **approximation affine** de f en a.
>
> Et on écrit, pour tout x très proche de a :
>
> $$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$
>
> ou
> Pour h petit, on a $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$

Exemple : Soit f la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout x très proche de 3 on a :
$f(x) \approx 6(x-3)+9$ donc $f(x) \approx 6x-9$
Par exemple : $f(3,001) \approx 6 \times 3,001 - 9 = 9,006$
Vérification : $f(3,001) = 3,001^2 = 9,006001$