Niveau :

Première Spécialité Maths

Titre Cours :

Chapitre 02

Probabilités Conditionnelles

Année :

2019-2020

Jakob Bernoulli

(27 Décembre 1654-16 Août 1705)

Citation du moment :

« L'incertitude n'est pas dans les choses mais dans notre tête : l'incertitude est une méconnaissance » (Jakob Bernoulli)

I. Introduction, définition et propriétés

1. Activité d'introduction

Dans les classes de terminale S du lycée Stendhal, la répartition des 2nde langues se fait de la façon suivante :

	Esp : E	All : A	Ital : I	Total
Filles : F	17	6	7	
Garçons : G	22	12	5	
Total				

a. Compléter le tableau ci-dessus

b. Si on choisit au hasard un des élèves de terminale S, quel sont les probabilités :

$P(F)=\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$ $P(G)=\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$ $P(E)=\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$

$P(A)=\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$ $P(I)=\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$ $P(F\cap E)=\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$

$P(F\cap A)=\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$ $P(F\cap I)=\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$

c. Déterminer $\frac{P(F\cap E)}{P(F)}=\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$ $\frac{P(F\cap A)}{P(F)}=\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$ $\frac{P(F\cap I)}{P(F)}=\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$

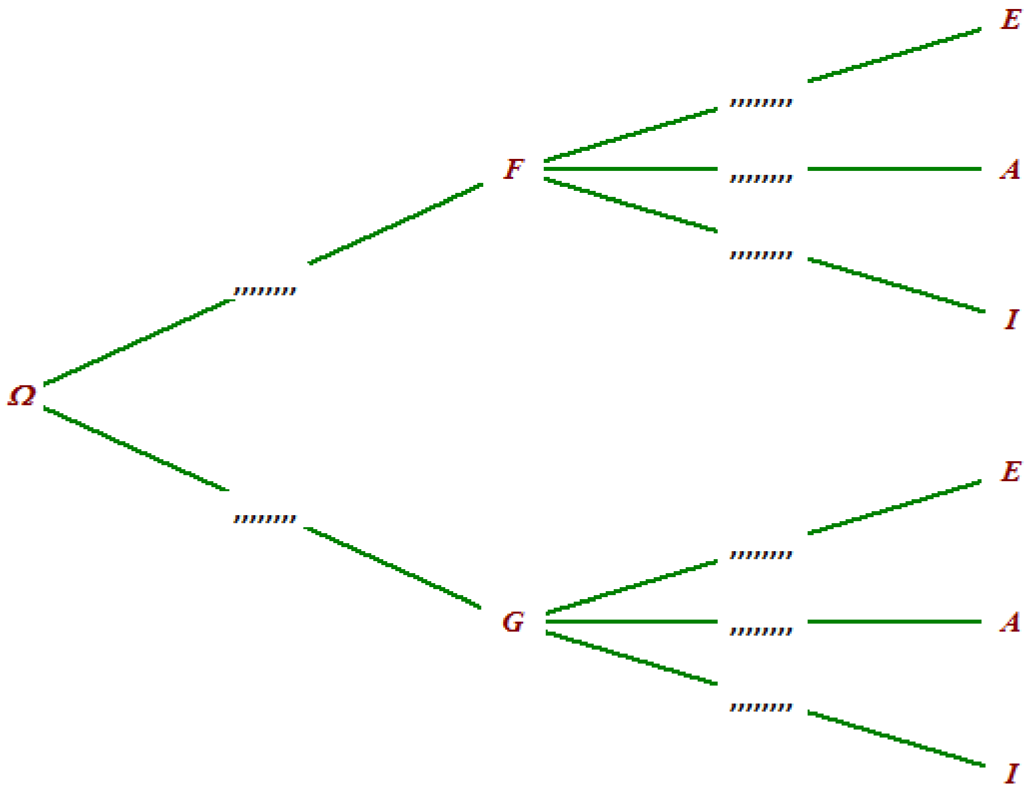
d. Déterminer la probabilité que l'élève fasse espagnol sachant que c'est une fille. On notera cette probabilité $P(E \mid F)$ ou $P_F(E)$:

e. Déterminer la probabilité que l'élève fasse allemand sachant que c'est une fille. On notera cette probabilité $P(A \mid F)$ ou $P_F(A)$:

f. Déterminer la probabilité que l'élève fasse italien sachant que c'est une fille. On notera cette probabilité $P(I \mid F)$ ou $P_F(I)$:

g. Comparer $P(F)$ et $P(F \cap E) + P(F \cap A) + P(F \cap I)$

h. Compléter l'arbre ci-dessous :



2. Définition et propriétés

Définition :

p est une probabilité sur un univers Ω. A est un événement tel que $P(A) \neq 0$.

Pour tout événement B, on appelle probabilité de B sachant A le réel :

$$P_A(B) = P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

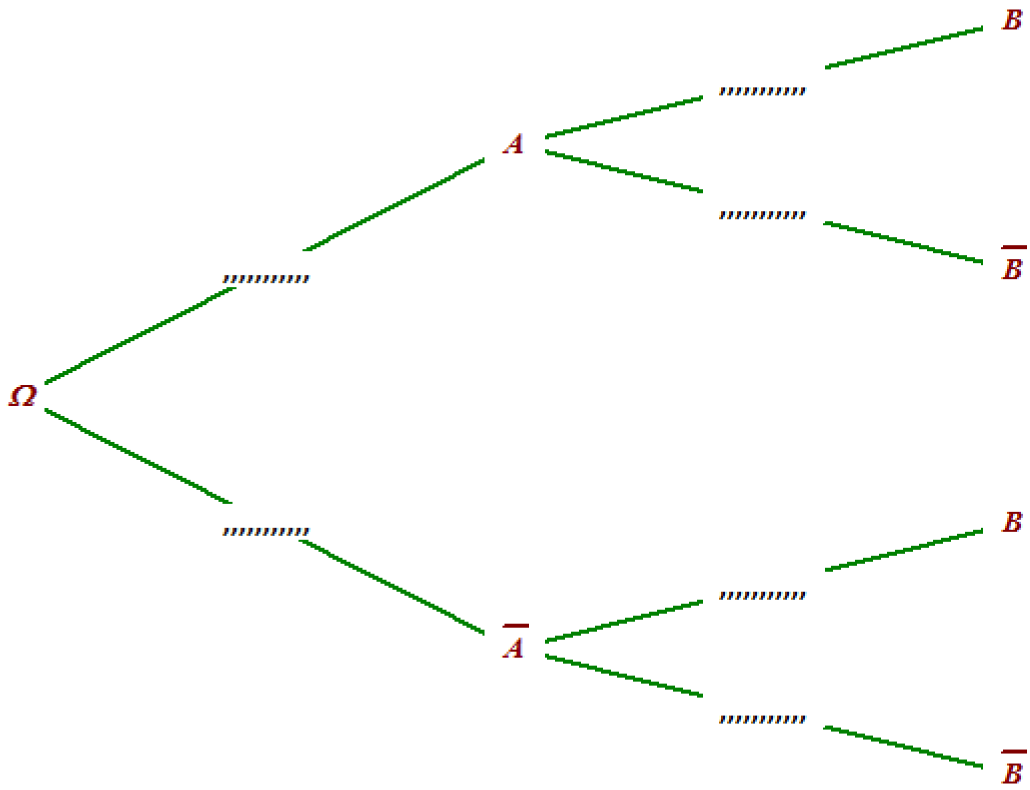
Propriétés :

- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$
- $P_A(A) = 1$
- $P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - P_A\left(B\right)$
- Si A et B sont incompatibles $A \cap B = \varnothing$ alors $P_A(B) = P_B(A) = 0$

Démonstration :

Exercice : Si $P(A) \neq 0$, démontrer que $P_A(B) = \dfrac{P_B(A) \times P(B)}{P(A)}$ (Théorème de Bayes)

3. Utilisation d'un arbre pondéré :

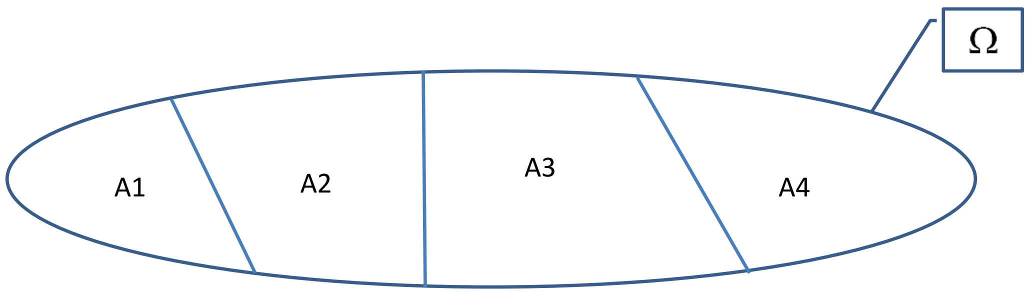


II. Formule de probabilités totales

Définition (Partition de l'univers) :

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n événements de probabilité non nulle de l'univers. On dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de Ω ou un système complet d'événements de Ω si les B_i sont deux à deux disjoints (intersection vide) et si

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$$



$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \Omega$$

Théorème des probabilités totales :

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est un système complet d'événements de Ω et si B est un événement de Ω alors

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(B\cap A_i)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+\ldots+P(B\cap A_n)$$

et

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i)=P_{A_1}(B)P(A_1)+P_{A_2}(B)P(A_2)+\ldots P_{A_n}(B)P(A_n)$$

Démonstration :

III. Indépendances d'événements

Définition :

On dit que deux événements **A et B sont indépendants** si $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

Théorème : A et B indépendants et $P(A)\neq 0 \iff P_A(B)=P(B)$

Propriété : Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ le sont aussi

Démonstration

B et $\overline{B}$ forment un système complet d'évènements de Ω donc d'après la formule de probabilité total : $P(A)=$

Donc $P(A\cap\overline{B})=$

Or A et B sont indépendants donc $P(A\cap B)=$

Donc $P(A\cap\overline{B})=$