# Trinômes du second degré.

## Classe de seconde

Cours de Vincent Obaton

« J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion. »

STENDHAL

**Année 2019-2020**

**Liste des savoirs et savoir-faire du chapitre :**

| CODES | INTITULES | Bilan | | |
|---|---|---|---|---|
| | | A | EA | NA |
| CH0101 | Etudier le signe d'une fonction polynôme du second degré données sous la forme factorisée. | | | |
| CH0102 | Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts. | | | |
| CH0103 | Factoriser une fonction polynôme du second degré, en diversifiant les stratégies : racine évidente, détection des racines par leur somme et produit, identité remarquanble, application des formules générales. | | | |
| | Choisir une forme adaptée(développée réduite, canonique, factorisée) d'une fonction polynôme du second degré dans le cadre de la résolution d'un problème (équation, inéquatrion, oprimisation, variations). | | | |

**Compétences dans tous les chapitres :**

| INTITULE | Bilan | | |
|---|---|---|---|
| | A | EA | NA |
| **Chercher** | | | |
| **Modéliser** | | | |
| **Représenter** | | | |
| **Calculer** | | | |
| **Raisonner** | | | |
| **Communiquer** | | | |

LES TRINOMES DU SECOND DEGRE.

Lycée Stendhal • Classe de première• Vincent Obaton

# 1. Objectifs

L'objectif de ce chapitre et de maîtriser parfaitement les fonctins polynômes du second degré, différentes formes, racines dupolynôme, suigne du polynome, tableaux des variations et courbes représentatives. Il faut ensuite savoir utiliser ces nouvelles connaissances dans des exercices plus complets et en ayant encore vos connaissances de seconde sur les fonctions de référence.

# 2. Les fonctions du second degré

**Définition 1 – Fonctions du second degré**

Les fonctions polynômes du second degré sont les fonctions de la forme :

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}$$

On note $C_f$ la représentation graphique de $f$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

**Exemples :**

1. $f : x \longmapsto x^2$ (forme ..........................................)

   $a = \ldots\ldots b = \ldots\ldots c = \ldots\ldots \alpha = \ldots\ldots \beta = \ldots\ldots x_1 = \ldots\ldots x_2 = \ldots\ldots$

2. $f : x \longmapsto 4x^2 + 5x - 7$ (forme ..........................................)

   $a = \ldots\ldots b = \ldots\ldots c = \ldots\ldots \alpha = \ldots\ldots \beta = \ldots\ldots x_1 = \ldots\ldots x_2 = \ldots\ldots$

3. $f : x \longmapsto 4(x-2)^2 + 5$ (forme ..........................................)

   $a = \ldots\ldots b = \ldots\ldots c = \ldots\ldots \alpha = \ldots\ldots \beta = \ldots\ldots x_1 = \ldots\ldots x_2 = \ldots\ldots$

4. $f : x \longmapsto -3(x-1)(2+x)$ (forme ..........................................)

   $a = \ldots\ldots b = \ldots\ldots c = \ldots\ldots \alpha = \ldots\ldots \beta = \ldots\ldots x_1 = \ldots\ldots x_2 = \ldots\ldots$

5. $f : x \longmapsto (x+1)^3 - x^3$ (forme ..........................................)

   $a = \ldots\ldots b = \ldots\ldots c = \ldots\ldots \alpha = \ldots\ldots \beta = \ldots\ldots x_1 = \ldots\ldots x_2 = \ldots\ldots$

6. $f : x \longmapsto \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$ (forme ........................)

   $a = \ldots\ldots b = \ldots\ldots c = \ldots\ldots \alpha = \ldots\ldots \beta = \ldots\ldots x_1 = \ldots\ldots x_2 = \ldots\ldots$

## 2.1. Domaine de définition

donc $\boxed{D_f = \ldots\ldots\ldots}$

## 2.2. Les différenes formes

**Définition 2 – Les différentes formes**

Les fonctions polynômes du second degré peuvent avoir plusieurs formes :

1. Forme développer : $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$
2. Forme factorisée : $f : x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ (Cette forme n'existe pas toujours )
3. Forme canonique : $f : x \longmapsto a(x - \alpha)^2 + \beta$

Vous devez êtres capable de passer de l'une à l'autre sans problème.

**Propriété 1 – Forme canonique**

Tous les polynômes du second degré peuvent se mettre sous la forme canonique, il existe donc $a \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Démontrons que toutes les fonctions polynômes du second degré peuvent se mettre sous la forme canonique :

**Démonstratin**

On note $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ , $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

Comme $a \neq 0$ alors on peut factoriser par $a$

$$P(x) =$$

De plus $x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début d'une identité remarquable :

$$x^2 + \frac{b}{a}x =$$

Il reste à injecter cette relation dans $P(x)$

On note $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ alors

$$f(x) =$$

En posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$ alors

$$f(x) =$$

Réciproquement, si $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ , $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$

Montrons qu'on peut le mettre sous forme développée
$f(x) =$
En posant $b = -2a\alpha$ et $c = a\alpha^2 + \beta$ alors

$$f(x) =$$

avec $a \in \mathbb{R}^*$ , $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

**Conclusion**

Tous les polynômes du second degré peuvent se mettre sous la forme canonique, il existe donc $a \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

**Exemple** :

1. Exemple pour déterminer la forme développée à partir de la forme factorisée?
   C'est simple il suffit de développer l'expression!
   $f(x) = 2(3-x)(x+2)$ définie sur $\mathbb{R}$
   $f(x) =$
   donc $f(x) =$
2. Exemple pour déterminer la forme développée à partir de la forme canonique?
   C'est simple il suffit de développer l'expression!
   $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$ définie sur $\mathbb{R}$
   $f(x) =$
   donc $f(x) =$
3. Exemple pour déterminer la forme canonique à partir de la forme développée?
   Il y a plusieurs méthodes possibles et l'on va en donner trois :

   (a) En utilisant le même méthode que lors de la dernière démonstration.
   On utilise le début d'une identité remarquable.
   $f(x) = 4x^2 - 4x + 4 =$

   (b) En utilisant l'identification entre la forme que l'on souhaite et la forme que l'on a
   $f(x) = 4x^2 - 4x + 4$ est la forme développée.
   On souhaite la forme canonique : $f(x) = 4(x-\alpha)^2 + \beta$
   On développe la forme canonique et on identifie ave la forme factorisée.

$f(x) =$
On identifie avec $f(x) = 4x^2 - 4x + 4$
Alors $\begin{cases} -8\alpha = \\ 4\alpha^2 + \beta = \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \\ 4\alpha^2 + \beta = \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \\ 1 + \beta = \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \\ \beta = \end{cases}$
donc $f(x) =$

(c) Il suffit d'utiliser la formule : $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$
Avec $a = 4$, $b = -4$, $c = 4$ et $\Delta = b^2 - 4ac =$
On obtient donc $\dfrac{b}{2a} =$
et $\dfrac{\Delta}{4a} =$
Donc $f(x) =$

4. Exemple pour déterminer la forme canonique à partir de la forme factorisée ?
Le plus simple est de développer et de faire comme dans le paragraphe précédent.
5. Exemple pour déterminer la forme factorisée à partir de la forme canonique ?
Ce n'est possible dans $\mathbb{R}$ que si $\beta$ est positif sinon on ne peut pas factoriser dans l'ensemble des réels.
Exemple : $f(x) =$

6. Exemple pour déterminer la forme factorisée à partir de la forme développée ?
Il faut soit factoriser avec les méthodes classiques soit passer par la forme canonique, mais ce n'est pas toujours possible dans l'ensemble des réels.
Exemple 01 : $f(x) = 4x^2 - 16x =$
Exemple 02 : $f(x) = 4x^2 - 25 =$
Exemple 03 :
$f(x) = 2x^2 - 4x - 6 =$
donc $f(x) =$

## 2.3. Variations

On utilise la forme canonique :

$$f : x \longmapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$$

**Propriété 2 – Variations des fonctions du second degré**

Il y a deux cas à prévoir : Soit $a > 0$ ou $a < 0$

1. Si $a > 0$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | $\searrow$ | $\beta$ | $\nearrow$ | |

$\beta$ est donc le minimum de $f$ atteint pour $x = \alpha$

2. Si $a < 0$ :

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & -\infty & & \alpha & & +\infty \\
\hline
 & & & \beta & & \\
f & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & & & &
\end{array}$$

$\beta$ est donc le maximum de $f$ atteint pour $x = \alpha$

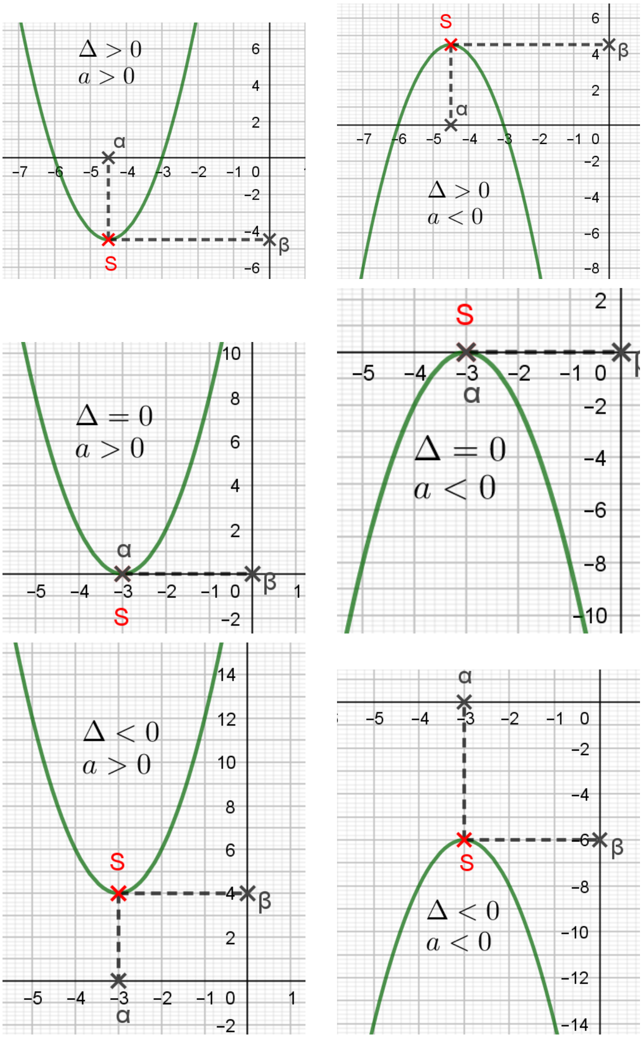
**Démonstration**

## 2.4. Courbes représentatives

La représentation gaphique d'une fonction polynôme du second degré est une parabol tournée vers l haut ou vrs l bas et dont le sommetest donné par la forme canonique

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Ces représentations graphiques sont à connaître par coeur :



# 3. Equations

**Définition 3 – Racine d'un polynôme**

On note **Racines du polynômes $f$**, les réels vérifiant :

$$f(x) = 0$$

.

**Exemple :**
On note $f : x \mapsto 2x^2 - 4x - 6$ une fonction polynômes du second degré.
Factorisons $f(x)$
Pour toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$,
$f(x) =$

Résolution de l'éqation $(fx) = 0$
$f(x) = 0 \Leftrightarrow$

Les racines de $f(x)$ sont 3 et $-1$.
Les solutions de $f(x) = 0$ sont 3 et $-1$.

### Propriété 3 – Formules des racines

On note $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$ :

1. Si $\Delta = 0$ alors il y a une seule racine $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$ et $f(x) = a(x - x_1)^2$
2. Si $\Delta > 0$ alors il y a deux racines réels distinctes $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
3. Si $\Delta < 0$ alors il n'y a pas de racine réelle. Attention cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas de racine du tout, mais elles ne sont pas dans $\mathbb{R}$.(Voir terminale)

**Démonstration**

**Propriété 4 – Somme et produit des racines**

i $f$ admet les réels $x_1$ et $x_2$ comme racines, alors :

▷ la somme des racines est $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$

▷ le produit des racines est $P = x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$

▷ pour tout $x$, $f(x) = a(x^2 - Sx + P)$.

**Démonstration**

# 4. Inéquations

**Propriété 5 – Tableaux des signes**

On note $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$ :

1. Si $\Delta = 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-b/2a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | Signe de $a$ | $0$ | Signe de $a$ | |

2. Si $\Delta > 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x - x_1)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $(x - x_2)$ | | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $a$ | | Signe de $a$ | \| | Signe de $a$ | \| | Signe de $a$ | |
| $f(x)$ | | Signe de $a$ | $0$ | Signe de $-a$ | $0$ | Signe de $a$ | |

3. Si $\Delta < 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | Signe de $a$ | |

**Démonstration**

# 5. Approfondissement

## 5.1. Changement de variable

Nous allons appliquer maintenant nos nouvelles connaissances pour résoudre des équations plus complexes.
Nous utiliserons pour beaucoup la méthode du changement de variable.

**Equations bicarrées**

Les équations bicarrées sont de la forme : $ax^4 + bx^2 + c = 0$
On utilise le changement de variable $t = x^2$ et on remplace $x^2$ par $t$ dans l'équation :
On obtient alors l'équation : $at^2 + bt + c = 0$ !! Oh, une équation connue ...
Il suffit de trouver les racines de $at^2 + bt + c$ pour trouver les valeurs de $t$ puis ensuite à l'aide de l'équation $x^2 = t$ d'obtenir les valeurs de $x$.

**Exemple** :

Résoudre l'équation : $2x^4+2x^2-24=0$ ou trouver les racines de $2x^4+2x^2-24$
On pose le changement de variable $x^2=t$
On obtient donc l'équation : $2t^2+2t-24=0$
Calculons le discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4(2)(-24)=4+192=196=14^2$
$\Delta>0$ donc d'après le cours il y a deux racines réelles disctinctes :
$t_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2+14}{4}=3$
et
$t_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2-14}{4}=-4$
Il reste donc à résoudre les deux équations :

1. $x_1^2=t_1 \Leftrightarrow x_1^2=3 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$
2. $x_2^2=t_2 \Leftrightarrow x_2^2=-4$ qui n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

Conclusion : les solutions sont $S=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$

**Autres équations**

**Exemple 01** :

On souhaite résoudre l'équation : $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x}-5=0$ sur $\mathbb{R}^*$ pour que $x\neq 0$.
On pose le changement de variable $\dfrac{1}{x}=t$
On obtient donc l'équation : $t^2+4t-5=0$
Calculons le discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4(1)(-5)=16+20=36=6^2$
$\Delta>0$ donc d'après le cours il y a deux racines réelles disctinctes :
$t_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4+6}{2}=1$
et
$t_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4-6}{2}=-5$
Il reste donc à résoudre les deux équations :

1. $\dfrac{1}{x_1}=t_1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1}=1 \Leftrightarrow x_1=1$
2. $\dfrac{1}{x_2}=t_2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_2}=-5 \Leftrightarrow x_2=-\dfrac{1}{5}$

Conclusion : les solutions sont $S=\left\{-\dfrac{1}{5};1\right\}$

**Exemple 02** :

On souhaite résoudre l'équation : $t-\sqrt{t}-12=0$ sur $\mathbb{R}^+$ pour que $x\geq 0$.
On pose le changement de variable $\sqrt{t}=x$
On obtient donc l'équation : $x^2-x-12=0$
Calculons le discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(1)(-12)=49=7^2$
$\Delta>0$ donc d'après le cours il y a deux racines réelles disctinctes :
$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1+7}{2}=4$

et
$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-7}{2} = -3$
Il reste donc à résoudre les deux équations :

1. $\sqrt{t_1} = x_1 \Leftrightarrow \sqrt{t_1} = 4 \Leftrightarrow t_1 = 16$
2. $\sqrt{t_2} = x_2 \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = -3$ qui n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Conclusion : les solutions sont $S = \{16\}$

**Exemple 04** :

On souhaite résoudre le système : $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-35 \end{cases}$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ (2-y)y=-35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ -y^2+2y+35=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ y^2-2y-35=0 \end{cases}$

Il suffit de résoudre l'équation $y^2-2y-35=0$ pour trouver les valeurs de $y$ puis d'en déduire celles de $x$.
(A vous de continuer et ensuite de vérifier que les valeurs trouvées vérifient le système du départ.)

## 5.2. Différentes inéquations

A l'aide des tableaux de signes des polynômes du second degré, nous pouvons dresser le tableau des signes d'expressions plus complexes qu'en seconde, avec des facteurs qui seront des polynômes du second degré.

**Exemple 01** :

On souhaite résoudre l'inéquation : $-3(x-1)(x^2+x-6) \leq 0$ sur $\mathbb{R}$.
$-3$ est un nombre négatif et ne s'annule pas.
$x-1$ est positif si $x$ est plus grand que 1 et $x-1$ s'annule en 1
Étudions le signe de $x^2+x-6$.
Calculons le discriminant : $\Delta = b^2-4ac = (1)^2-4(1)(-6) = 1+24 = 25 = 5^2$
$\Delta > 0$ donc d'après le cours il y a deux racines réelles disctinctes :
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-5}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$
On va pouvoir dresser le tableau des signes de l'expression $P(x) = -3(x-1)(x^2+x-6)$, à l'aide des paragraphes précédents :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3$ | | $-$ | \| | $-$ | \| | $-$ | \| | $-$ | |
| $x-1$ | | $-$ | \| | $-$ | 0 | $+$ | \| | $+$ | |
| $x^2+x-6$ | | $+$ | 0 | $-$ | \| | $-$ | 0 | $+$ | |
| $P(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

Donc $P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-3;1] \cup [2;+\infty[$