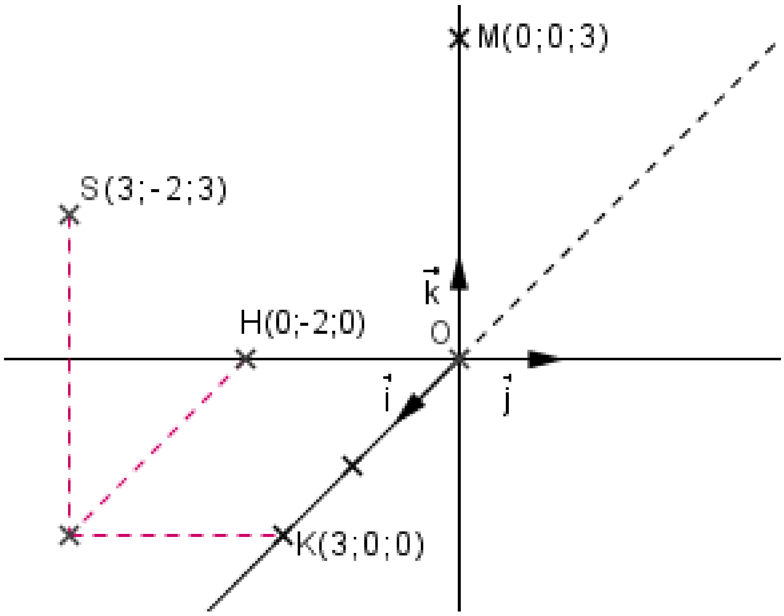
1 Repère de l'espace

L'espace est muni d'un repère $(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,; \overrightarrow{k}\,)$ orthonormal défini par une origine O et trois vecteurs orthogonaux deux à deux et de norme 1.
Un point de l'espace, admet donc dans ce repère, des coordonnées $M(x_M; y_M; z_M)$
x_m est **l'abscisse** de M, y_m **l'ordonnée** de M et z_M **la cote** de M.

On a alors : $\boxed{\overrightarrow{OM} = x_M\overrightarrow{i} + y_M\overrightarrow{j} + z_M\overrightarrow{k}}$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont $\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$



2 Vecteurs de l'espace et coordonnées

• Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ alors

1. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
2. La distance entre A et B est $AB = \| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
3. Les coordonnées du barycentre G de (A, α), (B, β) et (C, γ) avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ sont :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma},\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \text{ et } z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

• Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors :

1. $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v'}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ 2. $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v'}\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{pmatrix}$ 3. $k \in \mathbb{R}$, $k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$

3 Vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires

3.1 Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v}$

• $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont deux colonnes proportionnelles.

• $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow xy' - yx' = 0$ et $yz' - zy' = 0$ et $xz' - zx' = 0$.

3.2 Vecteurs coplanaires

$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires (dans un même plan) si on peut exprimer l'un des trois en fonction des deux autres.

• $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w} \text{ ou } \overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{w} \text{ ou } \overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$$

Conséquences :

1. A, B, Cet D sont quatre points coplanaires $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
2. Le barycentre de trois points pondérés et non alignés, est dans le plan défini par ces trois points.
   Preuve : Si G barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ) avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ alors :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AC}$$