Barycentre de points pondérés

Exercice 1 : (lieu géométrique)

1. Soient A et B deux points tels que $AB = 6cm$.
   Déterminer l'ensemble des points M tels que $\| 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \| = AB$.
2. ABC est un trinagle équilatéral.
   Déterminer l'ensemble des points M tels que $\| \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} \| = BC$.
3. ABC est un triangle isocèle en A.
   Déterminer l'ensemble des points M tels que $\| 7\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC} \| = \| \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \|$.

Exercice 2 : (lieu géométrique)

1. ABC est un triangle équilatéral.
   Déterminer l'ensemble des points M tels que $\| 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \| = \| 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} \|$
2. ABC est un triangle équilatéral.
   Déterminer l'ensemble des points M tels que $\| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MB} \| = \| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MB} \|$

Exercice 3 : (Alignement)

1. Soit $ABCD$ un parallélogramme, I le point défini par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et J le point défini par $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.
   Démontrer que C, I et J sont alignès.
2. Dans un triangle ABC on note A', B' et C' les milieux des côtés opposés à A, B et C, et L et M définis par : L milieu de $[B'C]$ et M symétrique de C' par rapport à B.
   - Écrire M comme barycentre de A et B, puis L comme barycentre de A et C.
   - Calculer $2\overrightarrow{A'L} + \overrightarrow{A'M}$.
   - Que peut-on en déduire sur les points A', L et M ?
3. $ABCD$ est un quadrilatère. I est le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2)$. J est le milieu de $[BC]$. K est tel que $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$. L est l'isobarycentre de A et D. O est le milieu de $[IK]$.
   (a) Faire une figure en expliquant les constructions.
   (b) Écrire K comme barycentre de C et D.
   (c) On veut montrer que O, J et L sont alignès :
   - Écrire $\overrightarrow{OI}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, puis $\overleftarrow{OK}$ en fonction de $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$.
   - Exprimer $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OK}$ en fonction de $\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OL}$ puis conclure.

Exercice 4 : (Droites concourantes)

1. $ABCD$ est un parallélogramme. I est le milieu de $[BC]$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$
   Montrer que les droites (IJ) et (AC) se coupent en G bar $\{(I; 2)(J; 3)\}$. (Exprimer $\overrightarrow{CG}$ en fonction de $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CJ}$)
2. Soit ABC un triangle quelconque. Soient I et J les deux points définis par les égalités vectorielles :
   $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$.
   Démontrer que (AJ) et (CI) sont sécantes en un point que l'on exprimera comme barycentre de A, B et C.