Exercice 1:

Étudier les variations des suites suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = 2^n - n$
   $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - (n+1) - 2^n + n = 2^n(2-1) - 1 = 2^n - 1$
   Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n - 1 \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq u_n$
   donc (u_n) est une suite croissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $v_{n+1} = v_n^2 + v_n + 1$ et $v_0 = -3$
   $v_{n+1} - v_n = v_n^2 + v_n + 1 - v_n = v_n^2 + 1$
   Or $v_n^2 + 1 > 0$ car v_n^2 est un carré, donc $v_{n+1} - v_n > 0$ donc $v_{n+1} > v_n$
   donc (v_n) est une suite croissante.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $w_n = \dfrac{n}{3^n}$
   $w_{n+1} - w_n = \dfrac{n+1}{3^{n+1}} - \dfrac{n}{3^n} = \dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{n+1}{3} - n\right) = \dfrac{1}{3^n} \times \dfrac{-2n+1}{3}$
   Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{3^n} > 0$ et pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{-2n+1}{3} < 0$
   donc $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Exercice 2:

Tracer dans deux repères différents (voir verso), les 3 premiers termes des suites ci-dessous :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = \sqrt{3 - u_{n-1}}$ et $u_0 = \dfrac{1}{2}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $v_n = -3(n-2)^2 + 7$

Exercice 3:

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 6}{u_n - 1}$
On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 2$ et $u_n \neq 1$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
   $u_0 = 6$
   $$u_1 = \frac{4u_0 - 6}{u_0 - 1} = \frac{4 \times 6 - 6}{6 - 1} = \frac{18}{5}$$
   $$u_2 = \frac{4u_1 - 6}{u_1 - 1} = \frac{4 \times \frac{18}{5} - 6}{\frac{18}{5} - 1} = \frac{42}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{42}{13}$$
   $$u_3 = \frac{4u_2 - 6}{u_2 - 1} = \frac{4 \times \frac{42}{13} - 6}{\frac{42}{13} - 1} = \frac{90}{13} \times \frac{13}{29} = \frac{90}{29}$$

2. On note (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 2}$
   Calculer v_0, v_1 et v_2.
   $$v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0 - 2} = \frac{6 - 3}{6 - 2} = \frac{3}{4}$$

$$v_1 = \frac{u_1 - 3}{u_1 - 2} = \frac{\frac{18}{5} - 3}{\frac{18}{5} - 2} = \frac{3}{5} \times \frac{8}{5} = \frac{3}{8}$$

$$v_2 = \frac{u_2 - 3}{u_2 - 2} = \frac{\frac{42}{13} - 3}{\frac{42}{13} - 2} = \frac{2}{13} \times \frac{16}{13} = \frac{3}{16}$$

3. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   Calculons v_{n+1} en fonction de u_n :

   $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} - 2} = \frac{\frac{4u_n - 6}{u_n - 1} - 3}{\frac{4u_n - 6}{u_n - 1} - 2} \frac{\frac{4u_n - 6 - 3u_n + 3}{u_n - 1}}{\frac{4u_n - 6 - 2u_n + 2}{u_n - 1}} = \frac{u_n - 3}{2u_n - 4} = \frac{u_n - 3}{2(u_n - 2)}$$

   On obtient donc :

   ➠ Si $v_n = 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3$ et (u_n) est une suite constante.

   ➠ Si $v_n \neq 0$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_n - 3}{2(u_n - 2)} \times \frac{u_n - 2}{u_n - 3} = \frac{1}{2}$

   donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{3}{4}$

4. Exprimer v_n en fonction de n.

   (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{3}{4}$

   donc $v_n = v_0 \times q^n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2^2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2^{n+2}}$

5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2v_n - 3}{v_n - 1}$. On sait que $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 2}$

   $\Leftrightarrow v_n(u_n - 2) = u_n - 3 \Leftrightarrow u_n v_n - 2v_n = u_n - 3$

   $\Leftrightarrow u_n v_n - u_n = 2v_n - 3 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = 2v_n - 3$

   Or $u_n - 3 \neq u_n - 2$ donc $v_n \neq 1$ donc on peut diviser par $u_n - 1$

   on obtient donc : $u_n = \frac{2v_n - 3}{v_n - 1}$

6. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

   $$u_n = \frac{2v_n - 3}{v_n - 1} = \frac{2 \times \frac{3}{2^{n+2}} - 3}{\frac{3}{2^{n+2}} - 1} = \frac{\frac{6}{2^{n+2}} - 3}{\frac{3}{2^{n+2}} - 1}$$

7. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

   • $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{2^{n+2}} = 0$

   et

   • $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{6}{2^{n+2}} = 0$

   donc (v_n) converge et sa limite est :

   $$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{6}{2^{n+2}} - 3}{\frac{3}{2^{n+2}} - 1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

Exercice 4:

Après avoir identifié si on utilise une somme de termes de suites géométriques ou arithmétiques, calculer les sommes ci-dessous :

1. $S_1 = 1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \ldots + 8\sqrt{2}$
   S_1 est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 1 :
   $S_1 = \sum_{k=0}^{7} (\sqrt{2})^k = 1 \times \dfrac{1-(\sqrt{2})^8}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{1-16}{1-\sqrt{2}} = -15 \times \dfrac{1 \times (1+\sqrt{2})}{1-2} = 15(1+\sqrt{2}) = 15 + 15\sqrt{2}$

2. $S_2 = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{50}$
   S_2 est la somme des termes d'une suite géométrique de raison x et de premier terme 1 :
   $S_1 = \sum_{k=0}^{50} (x)^k = 1 \times \dfrac{1-x^{51}}{1-x} = \dfrac{1-x^{51}}{1-x}$

3. $S_3 = a + 2a + 3a + 4a + \ldots + 275a$
   S_2 est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison a et de premier terme a :
   $S_1 = \sum_{k=1}^{275} ka = 275 \times \dfrac{a + 275a}{2} = 37950a$

Exercice bonus: Pour ceux qui ont encore du temps !!

Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3\sin(n) + 2\cos(n) + 5n}{n}$

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(n) \leq 1$

Comme $3 > 0$ et $2 > 0$ alors

$$-5 \leq 3\sin(n) + 2\cos(n) \leq 5$$
$$\Leftrightarrow$$
$$-5 + 5n \leq 3\sin(n) + 2\cos(n) + 5n \leq 5 + 5n$$

On peut diviser par n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc :

$$\frac{-5+5n}{n} \leq \frac{3\sin(n) + 2\cos(n) + 5n}{n} \leq \frac{5+5n}{n}$$

➠ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-5+5n}{n} = 5$

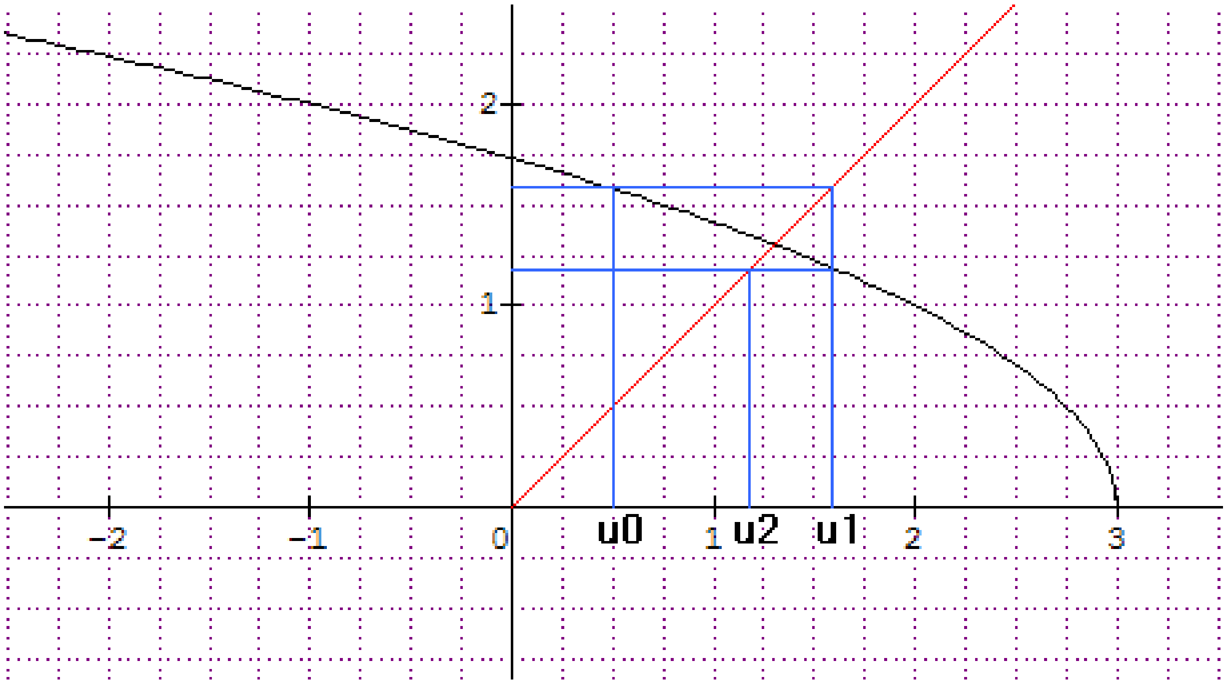
et

➠ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5+5n}{n} = 5$

donc d'après le Théorème des gendarmes, (u_n) converge et sa limite est :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{3\sin(n) + 2\cos(n) + 5n}{n} = 5}$$

Courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{3-x}$



Courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto -3(x-2)^2 + 7$