La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.
La calculatrice est autorisée pour ce devoir

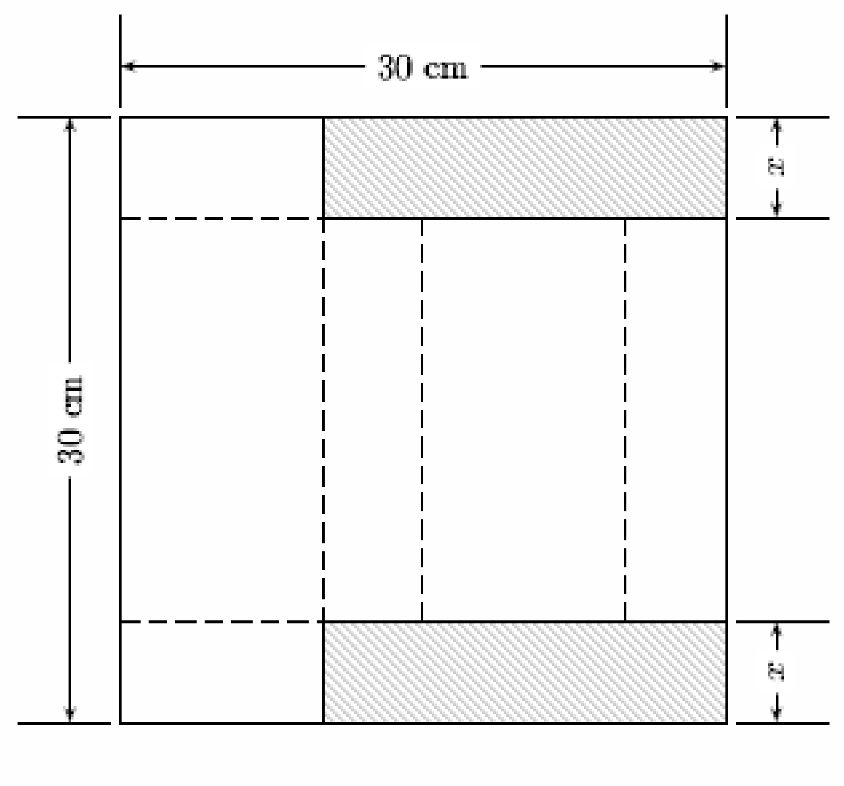
Exercice 1:

Partie I On considère la fonction f définie sur$\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x$.

1. Calculer $f'(x)$ après avoir précisé l'ensemble de dérivabilité de f.
2. Dresser le tableau de variation de f.

Partie II Un fabricant envisage la production de boîtes de lait en carton obtenues en découpant deux bandes (hacurées sur le dessin) de même largeur x (cm) dans une feuille carrée de côté 30 cm et pliant suivant les pointillés.

1. Quelle valeurs peut prendre x ?
2. Déterminer le volume de la boîte lorsque $x = 10$ cm.
3. Déterminer le volume de la boîte (en cm^3) en fonction de x.
4. Exprimer $V(x)$ en fonction de $f(x)$ où f est la fonction de la partie I.
5. Pour quelle valeur de x le volume de la boîte est-il maximal ? Quel est alors ce volume ?
6. Le fabricant veut obtenir des boîtes à base carrée. Quelle valeur de x peut-il prendre ?



Exercice 2:

Les trois questions de cet exercices sont indépendantes

1. Pour chacune des 3 affirmations ci-dessous, on demande de dire si elle est vraie ou fausse(répondre sur votre copie). On ne demande pas de justifier votre choix, mais attention des points seront enlevés si vos réponses ne sont pas justes.

   (a) Deux fonctions différentes ne peuvent pas avoir la même dérivée.

   (b) Si f est définie en a et si f n'est pas dérivable en a, alors la courbe de f n'admet pas de tangente au point d'abscisse a.

   (c) Les représentations graphiques de $x \mapsto 3x^2$ et $x \mapsto 2x^2$ ont la même tangente à l'origine.

2. Après avoir déterminé l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de $f : x \mapsto \sqrt{4-3x}$ cacluler $f'(x)$

3. On considère la fonctin $f : x \mapsto \dfrac{x^2+6x+9}{x+2}$.
   Existe-t-il sur sa courbe représentative un ou plusieurs points où la tangente a pour coefficient directeur $\dfrac{3}{4}$? Si oui, préciser leurs coordonnées.

Exercice 3:

$ABCD$ est un carré de côté a.
I et J sont tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

1. Exprimer en fonction de a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DI}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{JD}$.

2. En écrivant $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$ de 2 manières différentes, déterminer l'angle $\widehat{IAC}$ à $0,1°$ près.

3. Démontrer que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ} = 0$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 4:

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AC = 8$ cm, $BD = 6$ cm et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}$

1. Justifier que $\| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \|^2 = 64$ et $\| \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \|^2 = 36$

2. Démontrer que quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a :

   (a) $\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 + \| \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \|^2 = 2\left(\| \overrightarrow{u} \|^2 + \| \overrightarrow{v} \|^2\right)$

   (b) $\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 - \| \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \|^2 = 4\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$

3. En déduire que AB et AD vérifient le système :

$$\begin{cases} AB^2 + AD^2 = 50 \\ AB \times AD = 14 \end{cases}$$

4. Trouver les longueurs AB et AD.