Exercice 1:

a. On note A_{ABCD} l'aire du trapèze $ABCD$

Alors $A_{ABCD} = \dfrac{x^2}{2} + x \times (6-x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 6x$ donc $\boxed{A_{ABCD} = -\dfrac{1}{2}x^2 + 6x}$

b. Il faut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-\dfrac{1}{2}x^2 + 6x = 8$

$-\dfrac{1}{2}x^2 + 6x = 8 \Leftrightarrow -x^2 + 12x - 16 = 0$

C'est un équation du second degré. Calculons son discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4(-1)(-16) = 80 = (4\sqrt{5})^2$

$\Delta > 0$ donc il y a deux solutions réelles :

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-12+4\sqrt{5}}{-2} = 6 - 2\sqrt{5}$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-12-4\sqrt{5}}{-2} = 6 + 2\sqrt{5}$

Or on sait que $x < 6$ donc $\boxed{x = 6 - 2\sqrt{5}}$

Exercice 2:

1. D_f :

$f(x)$ existe si et seulement si $2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq 3x \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} \geq x$ donc $\boxed{D_f =]-\infty; \dfrac{2}{3}]}$

D_g :

$g(x)$ existe si et seulement si $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ donc $\boxed{D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$

$D_{f \circ g}$:

$(f \circ g)(x)$ existe si et seulement si $x \in D_g$ et $g(x) \in D_f$ donc $x \neq -1$ et $\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{2}{3}$

Il faut donc résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{3} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x+1}{3x+3} \leq 0$

- $-2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$
- $3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x+1$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$3(x+1)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$\dfrac{-2x+1}{3(x+1)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

donc $\boxed{D_{f \circ g} =]-\infty; -1[\cup [\dfrac{1}{2}; +\infty[}$

$D_{g \circ f}$:

$(g \circ f)(x)$ existe si et seulement si $c \in D_f$ et $f(x) \in D_g$ donc $x \leq \dfrac{2}{3}$ et $\sqrt{2-3x} \neq -1$

Or $\sqrt{2-3x}$ est toujours différent de -1 donc $x \leq \dfrac{2}{3}$

donc $\boxed{D_{f \circ g} =]-\infty; \dfrac{2}{3}]}$

2. $(f \circ g)(x) = f\left[g(x)\right] = f\left(\dfrac{1}{x+1}\right) = \sqrt{2 - 3 \times \dfrac{1}{x+1}} = \sqrt{2 - \dfrac{3}{x+1}}$ donc $\boxed{(f \circ g)(x) = \sqrt{2 - \dfrac{3}{x+1}}}$

   $(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right] = g\left(\sqrt{2-3x}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2-3x}+1}$ donc $\boxed{(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-3x}+1}}$

Exercice 3:

1. On note $u : x \mapsto 3 - 2x$, $v : x \mapsto x^2$ et $w : x \mapsto 2x - 1$ définies sur $\mathbb{R}$ alors $f = w \circ v \circ u$
2. Dressons le tableau des variations de la fonctions u :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
u	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   u est strictement décroissante sur $I =]-\infty; \frac{3}{2}]$ et $u(I) = [0; +\infty[$.

   v est strictement croissante sur $u(I)$ donc $\boxed{v \circ u \text{ est strictement décroissante sur } I =]-\infty; \frac{3}{2}]}$.

   De plus u est strictement décroissante sur $I = [\frac{3}{2}; +\infty[$ et $u(I) =]-\infty; 0]$.

   v est strictement décroissante sur $u(I)$ donc $\boxed{v \circ u \text{ est strictement croissante sur } I = [\frac{3}{2}; +\infty[}$.

3. Dressons le tableau des variations de la fonctions $v \circ u$:

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$v \circ u$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   $v \circ u$ est strictement décroissante sur $I =]-\infty; \frac{3}{2}]$ et $(v \circ u)(I) = [0; +\infty[$.

   w est strictement croissante sur $(v \circ u)(I)$ donc $\boxed{w \circ v \circ u \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty; \frac{3}{2}]}$.

   $v \circ u$ est strictement croissante sur $I = [\frac{3}{2}; +\infty[$ et $(v \circ u)(I) = [0; +\infty[$.

   w est strictement croissante sur $(v \circ u)(I)$ donc $\boxed{w \circ v \circ u \text{ est strictement croissante sur } [\frac{3}{2}; +\infty[}$.

Exercice 4:

1. $x^2 - 2x = x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$ donc $\boxed{S = \{0; 3\}}$
2. $x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ donc $\boxed{S = \{-3\}}$
3. Résolution de $4x^2 + 5x = -3 + x \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 3 = 0$
   $\Delta = 4^2 - 4(4)(3) = 16 - 16 \times 3 = 16 \times (-2) = -32$
   $\Delta < 0$ donc il n'y a pas de solution réelle à cette équation donc $\boxed{S = \emptyset}$.
4. Résolution de $x^2 - \sqrt{2}x - 12 = 0$
   $\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4(1)(-12) = 2 + 48 = 50 = (5\sqrt{2})^2$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions réelles à cette équation.
   $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$
   $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{\sqrt{2} - 5\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$
   donc $\boxed{S = \{-2\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\}}$

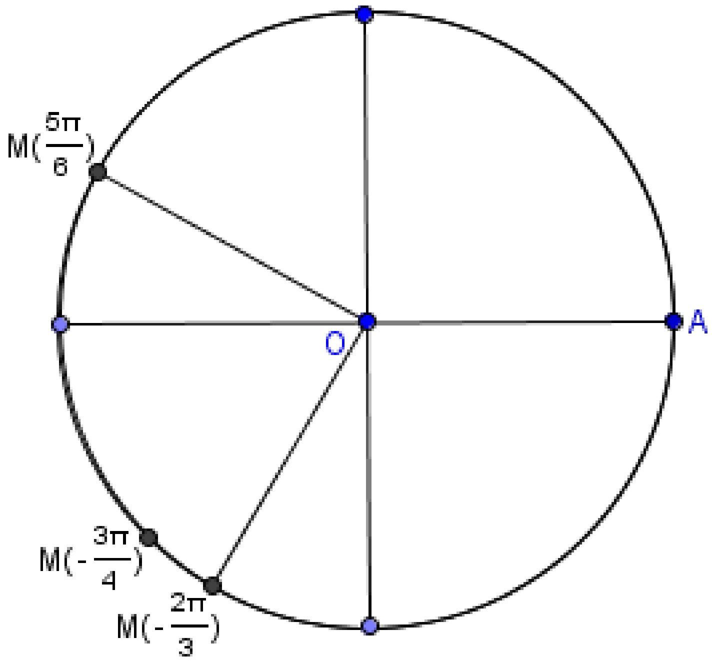
Exercice 5:

1. $\alpha = \dfrac{65\pi}{6} = \dfrac{60\pi}{6} + \dfrac{5\pi}{6} = 10\pi + \dfrac{5\pi}{6}$ donc $\boxed{\dfrac{5\pi}{6}}$ est la mesure principale de α.

   $\beta = -\dfrac{44\pi}{3} = -\dfrac{42\pi}{3} - \dfrac{2\pi}{3} = -14\pi - \dfrac{2\pi}{3}$ donc $\boxed{-\dfrac{2\pi}{3}}$ est la mesure principale de β.

   $\gamma = \dfrac{61\pi}{4} = \dfrac{64\pi}{4} - \dfrac{3\pi}{4} = 16\pi - \dfrac{3\pi}{4}$ donc $\boxed{-\dfrac{3\pi}{4}}$ est la mesure principale de γ.

2.



Exercice 6:

1. Faire la figure ... + explications

2. **a)** On sait que $\overrightarrow{BA'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ donc $3\overrightarrow{BA'} - 2\overrightarrow{BA'} - 2\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{A'B} + 2\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0}$

   Donc $\boxed{A' \text{ est le barycentre de } (B;1)(C;2)}$ car $1+2 \neq 0$.

   b) On sait que $4\overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{B'A} = \overrightarrow{0}$ donc $\boxed{B' \text{ est le barycentre des points } (A;1)(C;4)}$.

3. **a)** On utilise pour cette question, le théorème d'associativité des barycentres avec I barycentre de $(A;1)(B;2)(C;4)$ et A' barycentre partiel de $(B;2)(C;4)$ alors $\boxed{I \text{ barycentre de}}$ $(A;1)(A';2+4)$ donc de $\boxed{(A;1)(A';6)}$.

   b) De même on utilise le théorème d'associativité des barycentres avec I barycentre de $(A;1)(B;2)(C;4)$ et B' barycentre partiel de $(A;1)(C;4)$ donc $\boxed{I \text{ barycentre de}}$ $(B;2)(B';1+4)$ donc de $\boxed{(B;2)(B';5)}$.

   De la même façon on utilise le théorème d'associativité des barycentres avec I barycentre de $(A;1)(B;2)(C;4)$ et C' barycentre partiel de $(A;1)(B;2)$ donc $\boxed{I \text{ barycentre de}}$ $(C;4)(C';1+2)$ donc de $\boxed{(C;4)(C';3)}$.

   On obtient donc :

   - I barycentre de $(A;1)(A';6)$
     I barycentre de $(B;2)(B';5)$
     I barycentre de $(C;4)(C';3)$

   donc $I \in (AA')$, $I \in (BB')$ et $I \in (CC')$
   Conclusion : I est le point d'intersection des trois droites (AA'), (BB') et (CC').

Exercice 7:

➠ Si $a \neq 0$ et $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions opposés.
On note $x_1 = \alpha$ et $x_2 = -\alpha$ ces deux solutions.

on a donc : $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x + \alpha) = a(x^2 - \alpha^2) = ax^2 - a\alpha^2$ Par identification on obtient :$b = 0$ et $-a\alpha^2 = c$ donc $b = 0$.
➠ Réciproquement : Si $b = 0$ alors on obtient :$ax^2 + c = 0$
Or cette équation admet des solutions que si $c \leq 0$ donc la réciproque est fausse.