Exercice 1:

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.
   $f(-x) = (-x)^5(-x-1) = -x^5(-x-1) = x^5(x+1)$
   Or $f(x) = x^5(x-1)$ et $-f(x) = -x^5(x-1)$
   donc $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$ et f est ni paire ni impaire.

2. $\left(\dfrac{g}{h}\right)(x)$ exite si et seulement si $x^2 - 4 \neq 0$.
   Résolvons $x^2 - 4 = 0$:
   $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ ou $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$
   Donc $D_p = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

3. Comme -3 est négatif alors v et $-3v$ ont des variations contraires sur I.
   $-3v$ et $-3v - 5$ ont les mêmes variations sur I.
   Donc v et w ont des variations contraires sur I soit w est strictement croissante sur I.

4. $(x-2)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - 2\alpha x^2 - 2x - 2\gamma = \alpha x^3 + x^2(-2\alpha) + x(\gamma - 2\beta) - 2\gamma$.
   Par identification avec $k(x)$, on obtient :

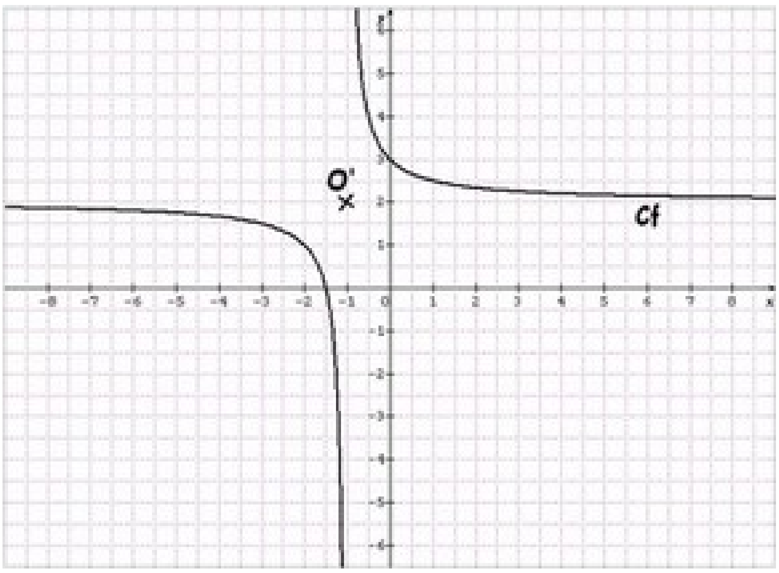
$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta - 2\alpha = -7 \\ \gamma - 2\beta = 6 \\ -2\gamma = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 4 \end{cases} \quad \text{donc } k(x) = (x-2)(3x^2 - x + 4)$$

Exercice 2

1. $a + \dfrac{b}{x+1} = \dfrac{a(x+1)+b}{x+1} = \dfrac{ax+a+b}{x+1}$
   Par identification à $f(x)$, on obtient :

$$\begin{cases} a = 2 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$$

2. On note $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ alors $f(x) = g(x+1) + 2$
   La courbe $\mathcal{C}_f$ est donc l'image de la courbe $\mathcal{C}_g$ par la translation de vecteur $-\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$, donc $\mathcal{C}_f$ est une hyperbole de centre de symétrie $O'(-1; 2)$.



Exercice 3

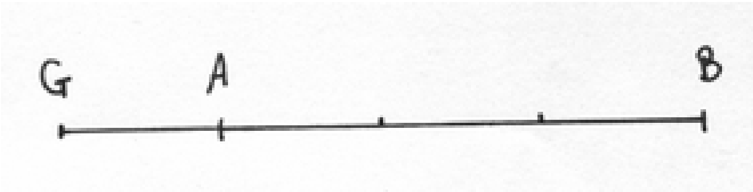
Voir le cours ....

Exercice 4

1. **a.** Le barycentre G de $(A; x^2-5x)(B; x)$ existe si et seulement si $x^2-5x+x \neq 0$
   $\Leftrightarrow x^2-4x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-4) \neq 0 \Leftrightarrow x = 0$ <u>et</u> $x = 4$
   Donc le barycentre G de $(A; x^2-5x)(B; x)$ existe si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$.

   b. G est l'isobarycentre de A et B si et seulement si $x^2-5x = x \Leftrightarrow x^2-6x = 0$
   $\Leftrightarrow x(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 6$.
   Or pour $x = 0$ le barycentre de $(A; x^2-5x)(B; x)$ n'existe pas donc G est l'isobarycentre de A et B lorsque $x = 6$.

2. **a.** $-4+1 = -3 \neq 0$ donc G existe et vérifie : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{-4+1}\overrightarrow{AB} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
   Donc $G \in (AB)$, $G \notin [AB]$ et $\overrightarrow{AG} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

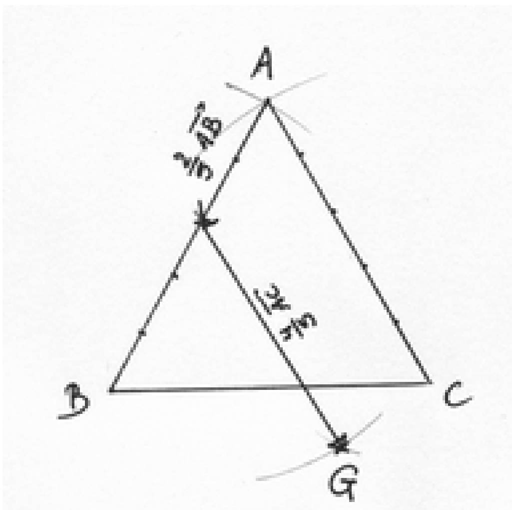


   b. G barycentre de $(A; -4)(B; 1)$ donc
   $-4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow -4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$
   ce qui traduit le fait que A est le barycentre de $(G; 3)(B; 1)$.

   c. G barycentre de $(A; -4)(B; 1)$ donc pour tout point M du plan on a : $-4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MG}$
   donc :
   $\Leftrightarrow \| -3\overrightarrow{MG} \| = 3AM$ soit $MG = AM$.
   Les points M sont donc les points de la médiatrice de $[AG]$.

Exercice 5

1. G est le barycentre de $(A; -\frac{1}{2})(B; 1)(C; 2)$ donc G est le barycentre de $(A; -1)(B; 2)(C; 4)$
   $-1+2+4 = 5 \neq 0$ donc G existe et vérifie :
   $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{-1+2+4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{4}{-1+2+4}\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \dfrac{4}{5}\overrightarrow{AC}$.



2. G est le barycentre de $(A; -\frac{1}{2})(B; 1)(C; 2)$ donc pour tout point M du plan :
   $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \dfrac{5}{2}\overrightarrow{MG}$
   donc $\| -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{AB} \|$
   $\Leftrightarrow \| \dfrac{5}{2}\overrightarrow{MG} \| = \| \overrightarrow{AB} \|$ soit $MG = 2$ cm.
   Donc l'ensemble des points M sont sur le cercle de centre G et de rayon 2 cm.