Exercice 1 :

Partie 1 :

1. Déterminer le polynôme $P(x)$ de degré 3 tel que pour tout réel x on ait

$$P(x+1) - P(x) = x^2 \text{ et } P(1) = 0$$

Soient a, b, c et d trois réels.
On note P le polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
On sait que $P(x+1) - P(x) = x^2$
or $P(x+1) - P(x) = \big(a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d\big) - \big(ax^3 + bx^2 + cx + d\big)$
$= a(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + b(x^2 + 2x + 1) + cx + c + d - ax^3 - bx^2 - cx - d$
$= ax^3 + 3ax^2 + 3ax + a + bx^2 + 2bx + b + cx + c - ax^3 - bx^2 - cx$
$= 3ax^2 + (3a + 2b)x + a + b + c$
Par identification avec x^2 on obtient :

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = -\dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{1}{6} \end{cases} \quad \text{Donc } P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + d$$

Pour trouver d on applique $P(1) = 0$ donc $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$

on obtient donc $\boxed{P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x}$

2. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = P(n+1)$$

D'après la question 1, on a :
$1^2 = P(2) - P(1)$
$2^2 = P(3) - P(2)$
$\vdots$
$(n-1)^2 = P(n) - P(n-1)$
$n^2 = P(n+1) - P(n)$
donc si on additionne toutes ces égalités, on obtient :
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2$
$= P(2) - P(1) + P(3) - P(2) + \ldots + P(n) - P(n-1) + P(n+1) - P(n)$
$= P(n+1) - P(1)$ or $P(1) = 0$
donc $\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = P(n+1)}$

3. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

D'après la question précédente, on a $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = P(n+1) = \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1)$
donc $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 =$
$(n+1)\left(\frac{1}{3}(n+1)^2 - \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{6}\right)$
$= (n+1)\left(\frac{1}{3}(n^2 + 2n + 1) - \frac{1}{2}n - \frac{1}{3}\right)$
$= (n+1)\left(\frac{1}{3}n^2 + \frac{2}{3}n - \frac{1}{2}n\right) = (n+1)\left(\frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{6}n\right)$
$= \frac{1}{3}n(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}n(n+1)\frac{2n+1}{2} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
donc $\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

4. En déduire la somme des carrées des 100 premiers entiers naturels non nuls.
   D'après la question précédente, on a :
   $1^2+2^2+\cdots+100^2=\dfrac{100(101)(201)}{6}=\dfrac{2030100}{6}=338350$

Partie 2 :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x$
On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.
   f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$
   De plus $f'(x)=\dfrac{1}{3}(3x^2)-\dfrac{1}{2}(2x)+\dfrac{1}{6}(1)=x^2-x+\dfrac{1}{6}$
   donc $\boxed{f'(x)=x^2-x+\dfrac{1}{6}}$
   f' est un trinôme du second degré et $f'(x)=\dfrac{1}{6}(6x^2-6x+1)$
   Étudions le signe de $6x^2-6x+1$
   $\Delta=(-6)^2-4(6)(1)=36-24=12=(2\sqrt{3})^2$
   $\Delta>$ donc il y a deux racines réelles :
   $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{6+2\sqrt{3}}{12}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}\approx 0,789$
   $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{6-2\sqrt{3}}{12}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\approx 0.211$
   Dressons le tabeau de signe de la fonction f' :

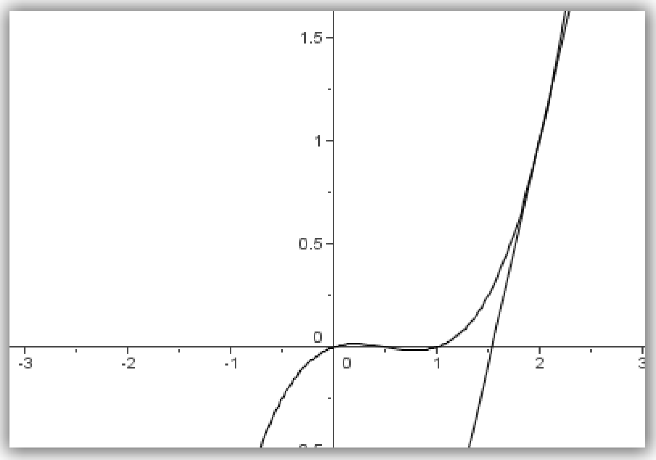
x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f
   D'après le tableau de signe précédent, on obtient :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_2)\approx 0.016$	$\searrow$	$f(x_1)\approx -0.016$	$\nearrow$	

3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.
   L'équation de la tangente est de la forme : $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ avec f'(2)=13_{6} et $f(2)=1$
   donc on obtient : $y=\dfrac{13}{6}(x-2)+1=\dfrac{13}{6}x-\dfrac{10}{3}$
   donc l'équation de la tangente est $\boxed{y=\dfrac{13}{6}x-\dfrac{10}{3}}$

4. Tracer $\mathcal{C}_f$ et T dans un même repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ avec $||\overrightarrow{i}||=||\overrightarrow{j}||=2$ cm



Exercice 2 :

Le but de cet exercice est de déterminer les solutions polynômiales du système (S) :

$$(S)\left\{\begin{array}{l} P(x)-\frac{x}{3}P'(x)+P''(x)=0 \\ \\ P'''(x)=6 \end{array}\right.$$

où l'inconnue est le polynome P, P'' représente la dérivée de P' et P''' la dérivée de P''

1. Quel doit être le degré du polynôme P ?
   On utlilise le fait que si on dérive un polynôme de degré n alors on obtient un polynôme de degré $n-1$.
   Comme $P'''(x)$ est une constante alors $P''(x)$ est de degré 1, d'où $P'(x)$ est de degré 2 et donc $P(x)$ est de degré 3.
2. Démontrer que le coefficient du terme de degré 3 est 1.
   Puisque P est un polynôme de degré 3 alors il existe a, b, c et d quatre réels tels que :
   $$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
   donc
   - $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
   - $P'(x)=3ax^2+2bx+c$
   - $P''(x)=6ax+2b$
   - $P'''(x)=6a$

   Or $P'''(x)=6$ donc $6a=6$ donc $a=1$
   on a donc $P(x)=x^3+bx^2+cx+d$
3. Exprimer $P(x)-\frac{x}{3}P'(x)+P''(x)$ en fonction de x.
   Essayons de traduire le fait que : $P(x)-\frac{x}{3}P'(x)+P''(x)=0$
   $P(x)-\frac{x}{3}P'(x)+P''(x)=(x^3+bx^2+cx+d)-\frac{x}{3}(3x^2+2bx+c)+6x+2b$
   $=x^3+bx^2+cx+d-x^3-\frac{2b}{3}x^2-\frac{c}{3}x+6x+2b$
   $=\frac{1}{3}bx^2+\left(\frac{2}{3}c+6\right)x+(d+2b)$
   donc $\boxed{P(x)-\frac{x}{3}P'(x)+P''(x)=\frac{1}{3}bx^2+\left(\frac{2}{3}c+6\right)x+(d+2b)}$
4. Conclure. On a donc $\frac{1}{3}bx^2+\left(\frac{2}{3}c+6\right)x+(d+2b)=0$
   par identification on trouve :
   $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}b=0 \\ \frac{2}{3}c+6=0 \\ d+2b=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=0 \\ c=-9 \\ d=0 \end{array}\right.$ On obtient donc $\boxed{P(x)=x^3-9x}$

❄ ❄ Bonne année ❄ ❄