Exercice 1 :

Partie 1 :

1. Déterminer le polynôme $P(x)$ de degré 3 tel que pour tout réel x on ait

$$P(x+1) - P(x) = x^2 \text{ et } P(1) = 0$$

2. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = P(n+1)$$

3. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4. En déduire la somme des carrées des 100 premiers entiers naturels non nuls.

Partie 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$
On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.
4. Tracer $\mathcal{C}_f$ et T dans un même repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ avec $||\overrightarrow{i}|| = ||\overrightarrow{j}|| = 2$ cm

Exercice 2 :

Le but de cet exercice est de déterminer les solutions polynômiales du système (S) :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} P(x) - \frac{x}{3}P'(x) + P''(x) = 0 \\ \\ P'''(x) = 6 \end{array} \right.$$

où l'inconnue est le polynome P, P'' représente la dérivée de P' et P''' la dérivée de P''

1. Quel doit être le degré du polynôme P ?
2. Démontrer que le coefficient du terme de degré 3 est 1.
3. Exprimer $P(x) - \frac{x}{3}P'(x) + P''(x)$ en fonction de x.
4. Conclure.

❄ ❄ Joyeux Noël et Bonne année ❄ ❄