1. Préliminaires :

a. $\forall a \in \mathbb{R}^+ \ \forall b \in \mathbb{R}^+$ alors :
$a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$

b. $h \in I$ donc $1 - h \in \mathbb{R}^+$

$$\tau_{[h,0]}(f) = \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-h}} - 1}{h} = \frac{\frac{1 - \sqrt{1-h}}{\sqrt{1-h}}}{h} = \frac{1 - \sqrt{1-h}}{h\sqrt{1-h}} = \frac{(1 - \sqrt{1-h})(1 + \sqrt{1-h})}{h\sqrt{1-h}(1 + \sqrt{1-h})}$$

donc $\tau_{[h,0]}(f) = \dfrac{h}{h\sqrt{1-h}(1 + \sqrt{1-h})} = \dfrac{1}{\sqrt{1-h}(1 + \sqrt{1-h})}$

$$\boxed{\tau_{[h,0]}(f) = \frac{1}{\sqrt{1-h}(1 + \sqrt{1-h})}}$$

c. La limite de $\tau_{[h,0]}(f)$ lorsque h tend vers 0 existe et est un réel donc f est dérivable en 0 et :
$f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1-h}(1 + \sqrt{1-h})} = \dfrac{1}{2}$

$$\boxed{f'(0) = \frac{1}{2}}$$

d. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est : $y = f'(0) \times x + f(0)$
Or $f'(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f(0) = 1$ donc l'équation de la tangente est : $\boxed{y = \frac{1}{2}x + 1}$

e. D'après le cours si x est très proche de 0 alors :

$$\boxed{f(x) \approx \frac{1}{2}x + 1}$$

2. Application :

a. Si v est très petite devant c alors le rapport $\dfrac{v^2}{c^2}$ est très proche de 0

b. Puisque $\dfrac{v^2}{c^2}$ est très proche de 0 on peut appliquer la formule du 1. e. en remplaçant x par $\dfrac{v^2}{c^2}$.
On obtient donc : $f\left(\dfrac{v^2}{c^2}\right) \approx \dfrac{1}{2}\dfrac{v^2}{c^2} + 1$ et donc :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + 1}$$

c. Si v est très petite devant c on a donc d'après la question précédente :

$$E_c = (\gamma - 1)m_0c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)m_0c^2 \approx \left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + 1 - 1\right)m_0c^2$$

donc $E_c \approx \dfrac{1}{2}\dfrac{v^2}{c^2}m_0c^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{m_0v^2c^2}{c^2}$

donc $\boxed{E_c \approx \frac{1}{2}m_0v^2}$