Exercice :

On note P le polynôme définie sur $\mathbb{R}$ suivant :

$$P(x) = x^5 - x^4 - 7x^3 + x^2 + 6x$$

1. Trouver toutes les racines du polynôme P
   ➠ Comme P est factorisable par x alors 0 est une racine de P.
   $P(0) = 0^5 - 0^4 - 7 \times 0^3 + 0^2 + 6 \times 0 = 0$
   ➠ $P(1) = 1^5 - 1^4 - 7 \times 1^3 + 1^2 + 6 \times 1 = 0$
   donc 1 est aussi une racine de P.
   ➠ $P(-1) = (-1)^5 - (-1)^4 - 7 \times (-1)^3 + (-1)^2 + 6 \times (-1) = 0$
   donc -1 est aussi une racine de P.
   ➠ Comme 0 est racine de P alors d'après le théorème de décomposition des polynômes, il existe Q de degré 4 tel que $P(x) = xQ(x)$
   De plus 1 est racine de P donc $P(1) = 1 \times Q(1) = 0$ donc $Q(1) = 0$ donc 1 est racine de Q donc d'après le théorème de décomposition des polynômes, il existe M de degré trois tel que $P(x) = x(x-1)M(x)$
   Or -1 est racine de P donc $P(-1) = -1 \times (-1-1) \times M(-1) = 0$ donc $M(-1) = 0$ donc -1 est racine de M.
   donc d'après le théorème de décomposition des polynômes, il existe N de degré deux tel que :
   $P(x) = x(x-1)(x+1)N(x)$
   donc il existe a, b et c trois réels tels que :
   $P(x) = x(x-1)(x+1)(ax^2 + bx + c)$
   $P(x) = x(x^2-1)(ax^2+bx+c) = (x^3-x)(ax^2+bx+c) = ax^5 + bx^4 + cx^3 - ax^3 - bx^2 - cx = ax^5 + bx^4 + (c-a)x^3 - bx^2 - cx$
   Par identification avec le polynôme P on trouve que a, b et$c$ vérifient :
   $$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c - a = -7 \\ -b = 1 \\ -c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -6 \end{cases}$$
   donc : $P(x) = x(x-1)(x+1)(x^2 - x - 6)$
   Il reste donc à factoriser $x^2 - x - 6$:
   $\Delta = 25$ donc il y a deux racines réelles : $x_1 = 3$ et $x_2 = -2$
   Conclusion :
   $$P(x) = x(x-1)(x+1)(x-3)(x+2)$$
   et ses racines sont $\boxed{\{-2; -1; 0; 1; 3\}}$

2. En déduire les solutions de l'équations suivante, dans $\mathbb{R}^+$:
   $$x^{\frac{5}{2}} - x^2 - 7x^{\frac{3}{2}} + x + 6\sqrt{x} = 0$$
   On pose le changement de variable $x = X^2$ avec $x \geq 0$
   On obtient donc l'équation :
   $$X^5 - X^4 - 7X^3 + X^2 + X = 0$$

Les solutions de cette équation sont $\{-2; -1; 0; 1; 3\}$ d'après la question 1.
Il faut donc résoudre les équations suivantes :
➠ $x = 0^2 = 0$
➠ $x = 1^2 = 1$
➠ $x = 3^2 = 9$
Il y a donc 4 solutions : $\boxed{S = \{0; 1; 9\}}$

3. En déduire toutes les solutions de l'équation suivante, dans $\mathbb{R}$:

$$-x^5 - x^4 + 7x^3 = -x^2 + 6x$$

On pose le changement de variable $x = -X$
On obtient donc l'équation :

$$X^5 - X^4 - 7X^3 + X^2 + X = 0$$

Les solutions de cette équation sont $\{-2; -1; 0; 1; 3\}$ d'après la question 1.
Il faut donc résoudre les équatiosn suivantes :
➠ $x = -(-2) = 2$
➠ $x = -(-1) = 1$
➠ $x = -0 = 0$
➠ $x = -1$
➠ $x = -3$
Il y a donc 5 solutions : $\boxed{S = \{-3; -1; 0; 1; 2\}}$