Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $8|x|^2 + 2|x| - 3 = 0$
   On pose le changement de variable $t = |x|$ et on obtient l'équation du second degré : $8t^2 + 2t - 3 = 0$.
   $\Delta = 100$ donc il y a deux solutions réelles : $t_1 = \frac{1}{2}$ et $t_2 = -\frac{3}{4}$.
   Il reste donc à résoudre les deux équations suivantes : $|x_1| = \frac{1}{2}$ et $|x_2| = -\frac{3}{4}$.
   La seconde équation n'a pas de solution car une valeur absolue est toujours positive.
   ➠ $|x_1| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}$ ou $x_1 = -\frac{1}{2}$.
   donc $S = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$

2. $4\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 9\left(\frac{1}{t}\right) + 5 = 0$
   On pose le changement de variable $X = \frac{1}{t}$ et on obtient l'équation du second degré : $4X^2 - 9X + 5 = 0$.
   $\Delta = 1$ donc il y a deux solutions réelles : $X_1 = \frac{5}{4}$ et $X_2 = 1$.
   Il reste donc à résoudre les deux équations : $\frac{1}{t_1} = \frac{5}{4}$ et $\frac{1}{t_2} = 1$.
   ➠ $\frac{1}{t_1} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow t_1 = \frac{4}{5}$
   ➠ $\frac{1}{t_2} = 1 \Leftrightarrow t_2 = 1$
   donc $S = \left\{\frac{4}{5}; 1\right\}$

3. $\begin{cases} \cos(x) + \cos(y) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(x)\cos(y) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$
   On pose le changement de variable : $X = \cos(x)$ et $Y = \cos(y)$ et on obtient le système :
   $$\begin{cases} X + Y = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ X \times Y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - Y \\ \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - Y\right) \times Y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - Y \\ 2Y^2 - (2 - \sqrt{2})Y - \sqrt{2} = 0 \end{cases}$$
   Il faut donc résoudre l'équation du second degré : $2Y^2 - (2 - \sqrt{2})Y - \sqrt{2} = 0$
   $\Delta = (2 - \sqrt{2})^2 - 4(2)(-\sqrt{2}) = 4 + 4\sqrt{2} + 2 = (2 + \sqrt{2})^2$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions réelles :
   $Y_1 = \frac{(2 - \sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2})}{4} = 1$ et $Y_2 = \frac{(2 - \sqrt{2}) - (2 + \sqrt{2})}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
   Les solutions du système sont donc : $S = \left\{\left(1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)\right\}$
   Il faut donc maintenant résoudre les équations : $\cos(x_1) = 1$ et $\cos(y_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\left[\cos(y_2) = 1 \text{ et } \cos(x_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
   ➠ $\cos(x_1) = 1 \Leftrightarrow \cos(x_1) = \cos(0) \Leftrightarrow x_1 = 2k_1\pi$ avec $k_1 \in \mathbb{Z}$
   ➠ $\cos(y_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(y_1) = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -\frac{3\pi}{4} + 2k_2\pi \\ y_1 = \frac{3\pi}{4} + 2k_2\pi \end{cases}$ avec $k_2 \in \mathbb{Z}$
   On obtient donc les couples suivants :
   $$S = \left\{\left(2k_1\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k_2\pi\right); \left(\frac{3\pi}{4} + 2k_1\pi; 2k_2\pi\right); \left(2k_1\pi; -\frac{3\pi}{4} + 2k_2\pi\right); \left(-\frac{3\pi}{4} + 2k_1\pi; 2k_2\pi\right) \text{ pour } k_1 \in \mathbb{Z} \text{ et } k_2 \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\dfrac{2x}{x-3} \leq \dfrac{6}{(x+2)(x-3)}$

   L'ensemble d'étude est : $E = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$

   $\dfrac{2x}{x-3} \leq \dfrac{6}{(x+2)(x-3)} \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x-3} - \dfrac{6}{(x+2)(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x^2+2x-3)}{(x+2)(x-3)} \leq 0$

   Dans la suite on note $A(x) = \dfrac{2(x^2+2x-3)}{(x+2)(x-3)}$

   Cherchons les racines de $2(x^2+2x-3)$

   $\Delta = 16$ donc il y a deux racines réelles : $x_1 = 1$ et $x_2 = -3$

   Dressons le tableau de signe de $A(x)$:

x	$-\infty$		-3		-2		1		3		$+\infty$
$2(x^2+2x-3)$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x+2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

   Donc $S = [-3; -2[\cup[1; 3[$

2. $\dfrac{-3x^2+51x-210}{2x^2+20x+44} > 0$

   On note $B(x) = \dfrac{-3x^2+51x-210}{2x^2+20x+44}$

   $B(x)$ existe si et seulement si $2x^2+20x+44 \neq 0$

   ➠ Cherchons les racines de : $2x^2+20x+44$:

   $\Delta = (4\sqrt{3})^2$ donc il y a deux racines réelles : $x_1 = -5+\sqrt{3}$ et $x_2 = -5-\sqrt{3}$

   donc l'ensemble d'étude est $E = \mathbb{R} \setminus \{-5-\sqrt{3}; -5+\sqrt{3}\}$

   ➠ Cherchons les racines de : $-3x^2+51x-210$:

   $\Delta = 81$ donc il y a deux racines réelles : $x_1 = 7$ et $x_2 = 10$

   On peut donc dresser le tableau de signe de $B(x)$:

x	$-\infty$		$-5-\sqrt{3}$		$-5+\sqrt{3}$		7		10		$+\infty$
$-3x^2+51x-210$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$2x^2+20x+44$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$B(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

   donc $S =]-5-\sqrt{3}; -5+\sqrt{3}[\cup]7; 10[$