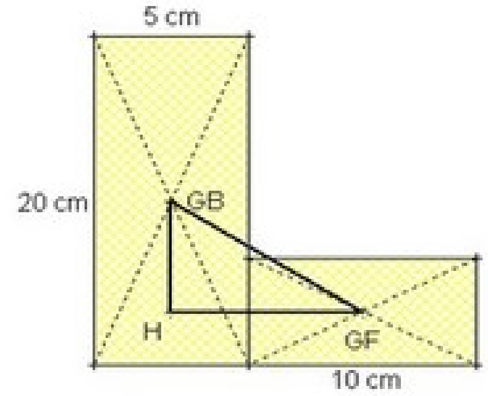
Exercice 1:



On nomme H le sommet de l'angle droit du triangle rectangle d'hypoténuse G_BG_F. (Voir schéma ci-dessus)
On a donc :
$G_BH = \dfrac{20}{2} - \dfrac{5}{2} = \dfrac{15}{2}$ et $\qquad G_FH = \dfrac{10}{2} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{15}{2}$
D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle G_BHG_F rectangle en H, on a :
$G_BG_F^2 = G_BH^2 + HG_F^2 = \left(\dfrac{15}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{15}{2}\right)^2 = \dfrac{225}{4} + \dfrac{225}{4} = \dfrac{450}{4}$ donc $G_BG_F = \sqrt{\dfrac{450}{4}} = \dfrac{\sqrt{450}}{\sqrt{4}} = \dfrac{15\sqrt{2}}{2} \approx 10,6$ cm

On note G le barycentre de $(G_B; m_b)(G_F; m_f)$.
Comme $m_b + m_f = 200 + 300 = 500 \neq 0$ alors G existe et d'après le théorème du cours, il vérifie :
$m_b\overrightarrow{GG_B} + m_f\overrightarrow{GG_F} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_BG} = \dfrac{m_f}{m_b + m_f}\overrightarrow{G_BG_F}$

$$\text{donc } \overrightarrow{G_BG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{G_BG_F},\ G \in [G_BG_F] \text{ et } G_BG = \frac{3}{5} \times \frac{15\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \approx 6,4 \text{ cm}$$

Exercice 2:

a) On note f la fonction $x \mapsto \dfrac{x^3 \sin x - x^2}{4x}$.
$f(x)$ existe si et seulement si $4x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$
Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est symétrique par rapport à 0 et on peut étudier la parité de f.
$f(-x) = \dfrac{(-x)^3 \sin(-x) - (-x)^2}{4(-x)} = \dfrac{-x^3(-\sin x) - x^2}{-4x} = \dfrac{x^3 \sin x - x^2}{-4x} = -f(x)$
b) **Il y avait une erreur dans le texte** : L'intervalle était $]5; +\infty[$

Méthode 1 :
On note a et b deux nombres de l'intervalle $]5; +\infty[$ tels que $a < b$.
La fonction $u : x \mapsto -3x + 15$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $u(a) > u(b) \Leftrightarrow -3a + 15 > -3b + 15$
Comme $a \in]5; +\infty[$ et $b \in]5; +\infty[$ alors $-3a + 15 < 0$ et $-3b + 15 < 0$
Or la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ donc $\dfrac{1}{-3a + 15} < \dfrac{1}{-3b + 15}$
De plus la fonction $v : x \mapsto -4x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc donc $\dfrac{-4}{-3a + 15} > \dfrac{-4}{-3b + 15}$
donc $f(a) > f(b)$.La fonction f est donc strictement décroissante sur $]5; +\infty[$.

Méthode 2 :
On note a et b deux nombres de l'intervalle $]5; +\infty[$ tels que $a < b$.
Étudions le signe de $f(a) - f(b)$:
$f(a) - f(b) = \dfrac{-4}{-3a + 15} - \dfrac{-4}{-3b + 15} = \dfrac{-4(-3b + 15)}{(-3a + 15)(-3b + 15)} - \dfrac{-4(-3a + 15}{(-3b + 15)(-3b + 15)}$
donc $f(a) - f(b) = \dfrac{12b - 60 - 12a + 60}{(-3a + 15)(-3b + 15)} = \dfrac{12b - 12a}{(-3a + 15)(-3b + 15)} = \dfrac{12(b - a)}{(-3a + 15)(-3b + 15)}$
Or $a < b$ donc $b - a > 0$ (Positif)
De plus $a > 5$ donc $-3a + 15 < 0$ (négatif) et $b > 5$ donc $-3b + 15 < 0$ (négatif)
donc $f(a) - f(b) > 0$ ce qui implique que $f(a) > f(b)$.
Conclusion : La fonction f est donc strictement décroissante sur $]5; +\infty[$.