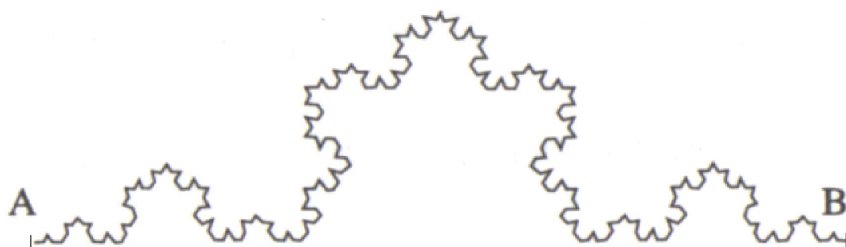
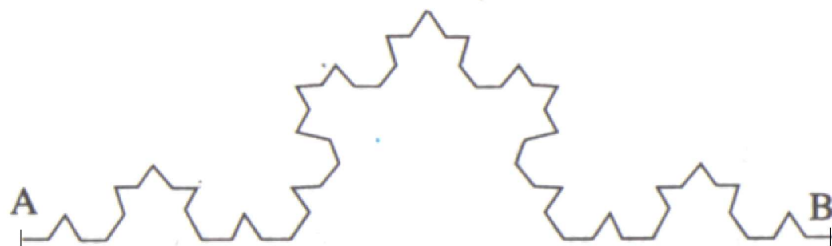
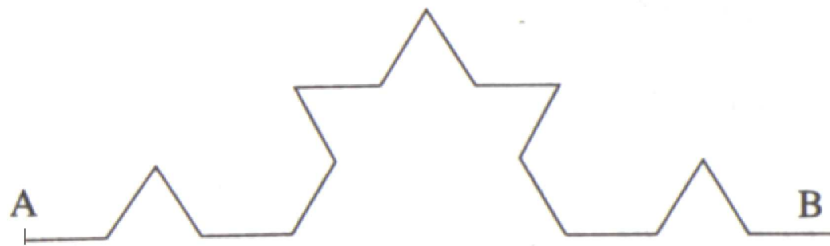
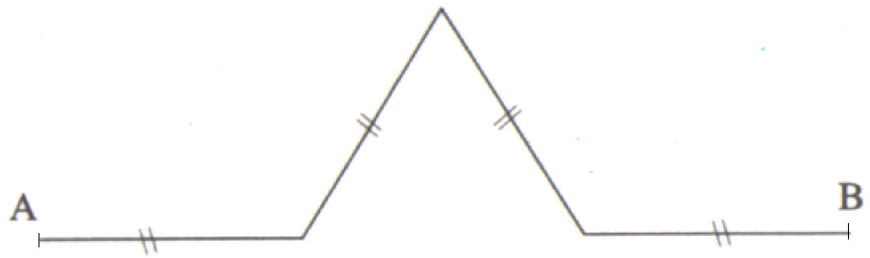


Problème du "Mathématiques 1re S et Term S" de la collection "Primordiale" de chez "Vuibert"

On note F_0 un segment $[AB]$ de longueur a , avec $a \in \mathbb{R}_+^*$

On passe de F_0 à F_1 en divisant le segment en trois segments de même longueur et en construisant sur la partie centrale un triangle équilatéral.

On passe de F_n à F_{n+1} en appliquant à chaque côté de F_n le procédé précédent.



1. Étude du nombre k_n de côtés de F_n .
 - (a) Donner k_0 , k_1 , k_2 et k_3 .
 - (b) Établir une relation de récurrence entre k_{n+1} et k_n .
 - (c) En déduire k_n en fonction de n .

2. Étude de la longueur l_n de la courbe F_n .
 - (a) Calculer l_0 , l_1 , l_2 et l_3 en fonction de a .
 - (b) Justifier que $l_n = a \left(\frac{4}{3}\right)^n$.
 - (c) Vérifier que $\left(\frac{4}{3}\right)^9 > 10$.
 - (d) En déduire que $l_{54} \geq a10^6$.
 - (e) Déterminer un entier m tel que $l_m \geq a10^{100}$.
 - (f) (l_n) converge t-elle ? Quelle est sa limite ?

3. Étude de l'aire A_n de la surface comprise entre F_n et le segment $[AB]$
 - (a) Calculer A_0 , A_1 et A_2 .
 - (b) Montrer que pour tout n , $A_{n+1} = A_n + \frac{a^2\sqrt{3}}{36} \left(\frac{4}{9}\right)^n$.
 - (c) En additionnant membre à membre les égalités obtenues au b), montrer que :

$$A_n = \frac{a^2\sqrt{3}}{20} \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n \right]$$
 - (d) Vérifier que $\left(\frac{4}{9}\right)^6 < 10^{-2}$.
 - (e) Peut-on déterminer un entier n à partir duquel $\left| A_n - \frac{a^2\sqrt{3}}{20} \right|$ est inférieur à a^210^{-100} ?
 - (f) (A_n) converge t-elle ? Quelle est sa limite ?

4. En regardant les résultats des questions 2) f) et 3) f), que peux-tu dire sur la longueur de la courbe F_n et sur l'aire de la surface comprise entre F_n et le segment $[AB]$?

5. Sur une feuille blanche, Tracer les trois premières étapes de construction (F_0 , F_1 et F_2) en partant d'un triangle équilatéral de côté 9 cm.