Exercice 1 :

1. Étude de la suite intermédiaire (w_n).

   (a) ➠ Si pour tout $n \geq 1$,, $w_n \neq 0$ alors :
   $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}} = \dfrac{\dfrac{u_n + u_{n-1}}{2} - u_n}{u_n - u_{n-1}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u_{n-1} - u_n}{u_n - u_{n-1}} = -\dfrac{1}{2} = Cste$
   donc (w_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $w_2 = u_2 - u_1 = b - a$.
   ➠ Si il existe $p \geq 1$ tel que $w_p = 0$ alors la suite (u_n) est constante à partir du rang p et $w_n = 0$ donc géométrique de raison 0 mais seulement à partir du rang p.

   (b) ➠ Si pour tout $n \geq 1$,, $w_n \neq 0$ alors :
   $w_n = w_2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2} = (-1)^{n-2}\dfrac{(b-a)}{2^{n-2}}$

2. Exprimons u_n en fonction de termes de n.
   On remarque que

$$\begin{aligned} w_2 + w_3 + w_4 + \ldots + w_n &= (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + (u_4 - u_3) + \ldots + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_n - u_{n-1}) \\ &= u_n - u_1 \end{aligned}$$

   donc

$$\begin{aligned} u_n = a + \sum_{k=2}^{n} w_k &= u_1 + w_2 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 + \frac{1}{2}} \\ &= a + \frac{2(b-a)}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \end{aligned}$$

   donc $\boxed{u_n = a + \dfrac{2(b-a)}{3}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}$

3. On sait que $-1 < -\dfrac{1}{2} < 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$
   donc (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a + \dfrac{2(b-a)}{3} = \dfrac{a+2b}{3}$
   Conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{a+2b}{3}}$$

Exercice 2 :(ancienne version)

1. Pour tout $n \geq 1$ et $u_n \neq 0$ on a :
   $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \dfrac{\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3} = \dfrac{2u_n + 3 - u_n - 4}{u_n + 4} \times \dfrac{u_n + 4}{2u_n + 3 + 3u_n + 12} = \dfrac{u_n - 1}{5(u_n + 3)}$ donc
   $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\dfrac{u_n - 1}{5(u_n + 3)}}{\dfrac{u_n - 1}{(u_n + 3)}} = \dfrac{u_n - 1}{5(u_n + 3)} \times \dfrac{u_n + 3}{u_n - 1} = \dfrac{1}{5}$
   donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = 0$

2. D'après le cours, on a $v_n = 0 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

3. On a donc $\frac{u_n - 1}{un + 3} = 0 \Leftrightarrow u_n = 1$

Exercice 2 :(nouvelle version)

1. Pour tout $n \geq 1$ et $u_n \neq 0$ on a :
$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3} = \frac{2u_n + 3 - u_n - 4}{u_n + 4} \times \frac{u_n + 4}{2u_n + 3 + 3u_n + 12} = \frac{u_n - 1}{5(u_n + 3)}$ donc
$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{u_n - 1}{5(u_n + 3)}}{\frac{u_n - 1}{(u_n + 3)}} = \frac{u_n - 1}{5(u_n + 3)} \times \frac{u_n + 3}{u_n - 1} = \frac{1}{5}$
donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = -1$

2. D'après le cours, on a $v_n = -1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = -\left(\frac{1}{5}\right)^n = -\frac{1}{5^n}$

3. Cherchons u_n en fonction de v_n :
$\frac{u_n - 1}{u_n + 3} = v_n \Leftrightarrow u_n - 1 = v_n(u_n + 3) \Leftrightarrow u_n - v_n u_n = 1 + 3v_n \Leftrightarrow (1 - v_n)u_n = 1 + 3v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 - v_n}$
On a donc :
$u_n = \frac{1 + 3\left(-\frac{1}{5^n}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{5^n}\right)} = \frac{5^n - 3}{5^n + 1}$ donc $\boxed{u_n = \frac{5^n - 3}{5^n + 1}}$

Exercice 3 :

1. Pour tout $n \in \{1; 2; 3; \ldots; n\}$ on a $n \geq p \geq 1$
Or la fonction $x \mapsto x + 2n^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc :
$$2n^2 + n \geq 2n^2 + p \geq 2n^2 + 1$$
Or la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc :
$$\sqrt{2n^2 + n} \geq \sqrt{2n^2 + p} \geq \sqrt{2n^2 + 1}$$
or la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :
$$\frac{1}{\sqrt{2n^2 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2n^2 + p}} \leq \frac{1}{\sqrt{2n^2 + 1}}$$

2. D'après la questin précédente, on a :
$$\frac{1}{\sqrt{2n^2 + n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n^2 + n}} \leq v_n \leq \frac{1}{\sqrt{2n^2 + 1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n^2 + 1}}$$
donc
$$\frac{n}{\sqrt{2n^2 + n}} \leq v_n \leq \frac{n}{\sqrt{2n^2 + 1}}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{2n^2+n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}} == \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{2n^2+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n\sqrt{2+\dfrac{1}{n^2}}} == \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2+\dfrac{1}{n^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

donc d'après le théorème des gendarmes (ou d'encadrements) on trouve que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Exercice 4 :

1. Etude de la suite (u_n)

   (a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 < n^2+1 < (n+1)^2$ car $(n+1)^2 = n^2+2n+1$
   Or la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc
   $\sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+1} < \sqrt{(n+1)^2} \Leftrightarrow n < \sqrt{n^2+1} < n+1$

   (b) D'après la question précédente et si $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $\dfrac{n}{n} < \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n} < \dfrac{n+1}{n} \Leftrightarrow 1 < u_n < 1+\dfrac{1}{n}$
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$ donc d'après le théorème des gendarmes on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ et donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{3n-1}{2n} \leq v_n \leq \dfrac{3n+1}{2n}$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n-1}{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n}{2n} = \dfrac{3}{2}$
   et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+1}{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n}{2n} = \dfrac{3}{2}$
   donc d'après le théorème des gendarmes (ou d'encadrements) on trouve que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{3}{2}}$$