A rendre le Jeudi 4 mai 2007

Exercice 1 :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $\begin{cases} u_1 = a \\ u_2 = b \\ u_{n+2} = \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2} \end{cases}$

1. On pose $w_n = u_n - u_{n-1}$
   (a) Monter que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique.
   (b) Expliciter w_n en fonction de n.
2. Expliciter u_n en fonction de n.
3. Étudier la convergence de la suite (u_n)

Exercice 2 :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$

et la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire u_n en fonction de n.

Exercice 3 :

On considère la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2n^2 + k}} = \frac{1}{\sqrt{2n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{2n^2 + 2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n^2 + n}}$$

1. Démontrer que pour tout $p \in \{1; 2; 3; \ldots; n\}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2n^2 + n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2n^2 + p}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2n^2 + 1}}$
2. Étudier la convergence de (v_n)

Exercice 4 :

1. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}$
   (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n < \sqrt{n^2 + 1} < n + 1$
   (b) Étudier la convergence de (u_n)
2. Étudier la convergence de (v_n) définie par $v_n = \dfrac{3n + (-1)^n}{2n}$