Correction du devoir N°19, d'un site Internet, téléchargeable à l'adresse :
http://jgaltier.free.fr/Premiere_S/etude_fonctions_trigo_suites.pdf

Exercice 1 :

1. $P(X) = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - X - 1 = 0$
   On a donc une équation du second degré avec des coefficients différents de 0 et qui n'est pas une identité remarquable. On utilise donc le discriminant :
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-1)(2) = 1 + 8 = 9 = 3^2$
   $\Delta > 0$ cette équation a deux solutions réelles distinctes :
   $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+3}{4} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2}$
   donc $S = \left\{-\dfrac{1}{2}; 1\right\}$
   Étude du signe de $P(X)$:
   On a $P(X) = 2(X-1)\left(X + \dfrac{1}{2}\right)$ et son tableau de signe est :

x	$-\infty$		-1/2		1		$+\infty$
$P(X)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \sin(2x) - 2\sin(x)$

   (a) $\forall x \in \mathbb{R}$ on a
   $f(x+2\pi) = \sin(2(x+2\pi)) - 2\sin(x+2\pi) = \sin(2x+4\pi) - 2\sin(x) = \sin(2x) - 2\sin(x) = f(x)$
   donc la fonction f est 2π-périodique et on peut faire son étude sur $[-\pi; \pi]$.
   De plus $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = \sin(-2x) - 2\sin(-x) = -\sin(2x) + 2\sin(x) = -f(x)$
   donc la fonction f est impaire et par symétrie on peut faire l'étude sur $[0; \pi]$.

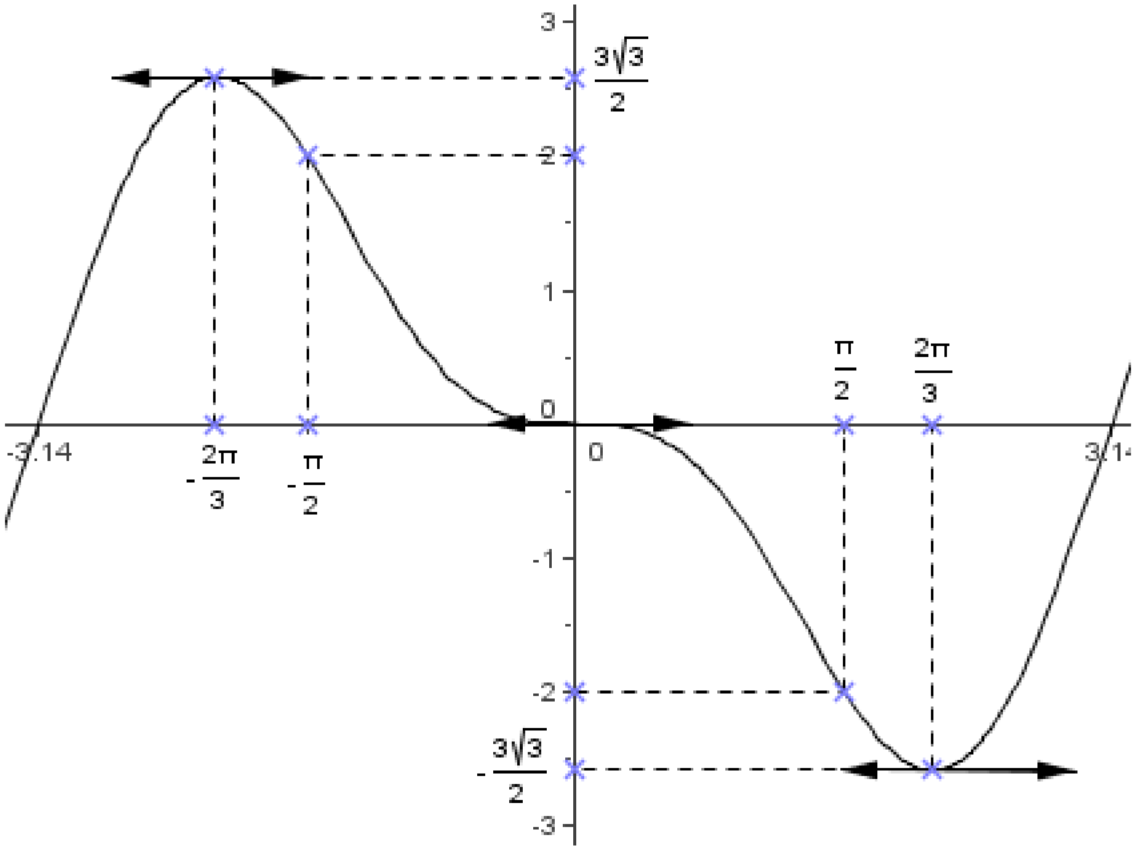
   (b) La fonction f est dérivable sur $[0; \pi]$ et $f'(x) = 2\cos(2x) - 2\cos(x)$
   on utilie une des formules de linéarisation :
   $f'(x) = 2(2\cos^2(x) - 1) - 2\cos(x) = 4\cos^2(x) - 2\cos(x) - 2$ donc

   $$\boxed{f'(x) = 4\cos^2(x) - 2\cos(x) - 2}$$

   (c) On remarque que $f'(x) = 2(2\cos^2(x) - \cos(x) - 1) = 2P(\cos(x))$
   donc $f'(x) = 4(\cos(x) - 1)\left(\cos(x) + \dfrac{1}{2}\right)$
   ➠ $\cos(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geq 1 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pi$
   ➠ $\cos(x) + \dfrac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geq -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$
   Tableau de variation de f :

x	0		$2\pi/3$		π
$\cos(x) - 1$	0	$-$	|	$-$	0
$\cos(x) + 1/2$	|	$+$	0	$-$	|
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↘	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	0

3. Représentation d'une période de la fonction f :



Exercice 2 :

1. ➠ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$

   ➠ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1}$

   ➠ $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} x^2+x+1 = 3 \\ \displaystyle\lim_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} \frac{1}{x^2+x-2} = +\infty \end{array}\right\}$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} f(x) = +\infty}$

   ➠ $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} x^2+x+1 = 3 \\ \displaystyle\lim_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} \frac{1}{x^2+x-2} = -\infty \end{array}\right\}$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} f(x) = -\infty}$

   ➠ $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x^2+x+1 = 3 \\ \displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{1}{x^2-2} = -\infty \end{array}\right\}$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = -\infty}$

   ➠ $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} x^2+x+1 = 3 \\ \displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{1}{x^2-2} = +\infty \end{array}\right\}$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = +\infty}$

   • On a $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.

• On a $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.
• On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f.
f est dérivable en $\mathbb{R} \setminus \{-2;1\}$ comme fonction rationnelle de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-2;1\}$.
On pose $u(x) = x^2 + x + 1$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x + 1$
puis $v(x) = x^2 + x - 2$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(x) = 2x + 1$
Alors $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x^2+x-2) - (x^2+x+1)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} = \dfrac{-3(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$
donc

$$f'(x) = \frac{-3(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$$

x	$-\infty$		-2		$-1/2$		1		$+\infty$
$2x+1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$ $+\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	$-1/3$	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	1

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2} == \frac{\frac{1-2+4}{4}}{\frac{1-2-8}{4}} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

2. $g(x) = \sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+x} = \dfrac{(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+x})}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+x}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+x}}$
   Si $x > 0$ alors
   $g(x) = \dfrac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}}$
   donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

Exercice 3 :

1. $u_0 = 2^0 - 0 = 1 - 0 = 1$
   $u_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$
   $u_2 = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$
   $u_3 = 2^3 - 3 = 8 - 3 = 5$

2. $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - (n+1) - 2^n + n = 2^n(2-1) - n - 1 + n = 2^n - 1$
   Or pour tout $n \geq 0$ $2^n \geq 1$ donc $2^n - 1 \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$
   Conclusion : pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \geq u_n$ donc (u_n) est croissante.

Exercice 4 : On note $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite dont u_n représente la somme, en francs, d'argent dans sa tirelire lorsqu'il a $5 + n$ ans. On a donc
$u_1 = 100$
$u_2 = 100 + (100 + 50) = 250$
$u_3 = 250 + (100 + 2 \times 50) = 450$
$u_4 = 450 + (100 + 3 \times 50) = 700$

On remarque que $u_n = u_{n-1} + 100 + 50(n-1)$
Recherchons une formule donnant u_n en fonction de n :

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + 100 + 50(n-1) \\ &= u_{n-2} + 100 + 50(n-2) + 100 + 50(n-1) \\ &= u_{n-3} + 100 + 50(n-3) + 10 + 50(n-2) + 100 + 50(n-1) \end{aligned}$$

et si on continue comme ça jusqu'à u_1 on arrive à :
$u_n = u_1 + 100(n-1) + 50[1 + 2 + 3 + \ldots (n-3) + (n-2) + (n-1)]$
donc

$$\boxed{u_n = 100 + 100(n-1) + 50[1 + 2 + 3 + \ldots (n-3) + (n-2) + (n-1)]}$$

Vérifions que cette formule fonctionne pour les termes que l'on connaît :
$u_2 = 100 + 100 \times 1 + 50(1) = 100 + 100 + 50 = 250$
$u_3 = 100 + 100 \times 2 + 50(1 + 2) = 100 + 200 + 150 = 450$
u_4=100+100×3 $+ 50(1 + 2 + 3) = 100 + 300 + 300 = 700$
Conclusion :
A 18 ans il aura u_{14} francs dans sa tirelire :
$u_{14} = 100 + 100 \times 13 + 50(1 + 2 + 3 + \ldots + 13) = 100 + 1300 + 50 \times 91 = 5950$
A sa majorité il aura 5950 F ou environ 907 euros.

Complément : $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-3) + (n-2) + (n-1)$ est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1.
Vous verrez plus tard que
$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$
et donc que
$u_n = 100 + 100(n-1) + 25n(n-1) = 100 + 100n - 100 + 25n^2 - 25n = 25n^2 + 75n$
donc

$$\boxed{u_n = 25n^2 + 75n}$$