Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+7x+10}{x+1}$

1. Si $A(x; f(x))$ est l'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des ordonnées alors $x = 0$
   donc $y = f(0) = \dfrac{0^2+7\times 0+10}{0+1} = 10$ donc $\boxed{A(0;10)}$

2. Si $B(x; f(x))$ et $C(x'; f(x'))$ sont les points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses alors $y = f(x) = 0$.
   $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 10 = 0$
   On obtient une équation du second degré qui n'est pas sous forme d'une identité remarquable et avec des coefficients différents de 0 donc on utilise le discriminant :
   $\Delta = b^2 - 4ac = (7)^2 - 4(1)(10) = 49 - 40 = 9 = 3^2$
   $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :
   $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7+3}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7-3}{2} = -5$
   Donc $\boxed{B(-2;0)}$ et $\boxed{C(-5;0)}$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ on a :
   $x + 6 + \dfrac{4}{x+1} = \dfrac{(x+6)(x+1)+4}{x+1} = \dfrac{x^2+7x+6x+4}{x+1} = f(x)$
   donc
   $$\boxed{f(x) = x + 6 + \frac{4}{x+1}}$$

4. ➟ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$
   ➟ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$
   ➟ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} x^2+7x+10 = 4 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \dfrac{1}{x+1} = -\infty \end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = -\infty}$
   ➟ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} x^2+7x+10 = 4 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \dfrac{1}{x+1} = +\infty \end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = +\infty}$

5. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty$ alors la droite (D) d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

6. Non il n'y a pas d'asymptote horizontale car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

7. On utilise pour cette question le résultat de la question 3)
   $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+6) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x+1} = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (x+6) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{x+1} = 0^- \end{array}\right.$ donc la droite (Δ) d'équation $y = x + 6$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

8. Si $x < -1$ alors $f(x) - (x+6) = \dfrac{4}{x+1} < 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de (Δ).
   Si $x > -1$ alors $f(x) - (x+6) = \dfrac{4}{x+1} > 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (Δ).

9. Il y a plusieurs étapes dans cette question :

   (a) Calculons $f'(x)$:
   f est dérivable en $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme fonction rationnelle de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
   On pose $u(x) = x^2 + 7x + 10$ et $v(x) = x + 1$ alors u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et
   $u'(x) = 2x + 7$ puis $v'(x) = 1$
   On a
   $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \dfrac{(2x+7)(x+1) - (x^2+7x+10)(1)}{(x+1)^2}$
   donc
   $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 2x + 7x + 7 - x^2 - 7x - 10}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$

   $$\text{donc } \boxed{f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}}$$

   (b) Calcuons les équations des tangentes (T_1) et (T_2)
   Equation de (T_1):
   La tangente (T_1) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -2 est de la forme :

   $$y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$$

   avec $f'(-2) = \dfrac{4 - 4 - 3}{(-2+1)^2} = 4 - 4 - 3 = -3$ et $f(-2) = 4 - 14 + 10 = 0$
   donc $y = -3(x+2) = -3x - 6$
   L'équation de (T_1) est donc $\boxed{y = -3x - 6}$
   Equation de (T_2):
   La tangente (T_2) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -3 est de la forme :

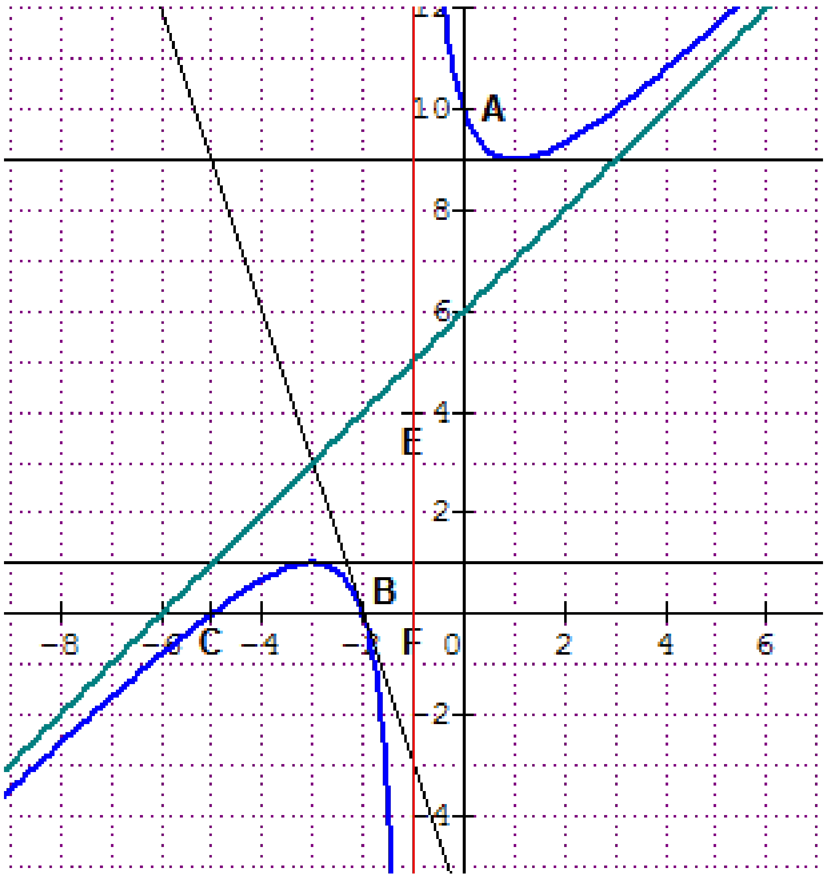
   $$y = f'(-3)(x+3) + f(-3)$$

   avec $f'(-3) = \dfrac{9 - 6 - 3}{(-3+1)^2} = 0$ et $f(-3) = \dfrac{9 - 21 + 10}{-2} = 1$
   donc $y = f(-3) = 1$
   L'équation de (T_2) est donc $\boxed{y = 1}$

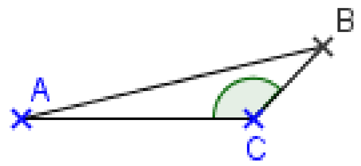
   (c) Dressons le tableau de variation de la fonction f : (Important pour la suite)

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
			1			$+\infty$		$+\infty$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$			$-\infty$			9		

10. Il fallait aussi tracer la courbe de la fonction f ainsi que les autres droites.



Exercice 2 :



On a $AB = 5$ km, $BC = 2$ km et $(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}}) = \dfrac{3\pi}{4}$
On souhaite calculer AB :
Appliquons une des formules d'Al-Kashi dans le triangle ACB
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \cos(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}}) = 25 + 4 - 20 \times \dfrac{(-\sqrt{2}}{2} = 29 + 10\sqrt{2}$
or $29 + 10\sqrt{2} > 0$ donc $\boxed{AB = \sqrt{29 + 10\sqrt{2}}}$
On utilise maintenant la formule de la vitesse en fonction du temps :
$v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{AB}{\dfrac{1}{2}} = 2AB = 2\sqrt{29 + 10\sqrt{2}}\ km/h$
donc

$$v \approx 13,14\ km/h$$