Partie I :

On note H le projeté orthogonal de B sur (AC) alors $S = \dfrac{AC \times HB}{2}$

De plus $\sin(\widehat{BAC}) = \dfrac{HB}{AB}$ donc $HB = AB \times \sin(\widehat{BAC})$ donc $S = \dfrac{AC \times AB \times \sin(\widehat{BAC})}{2}$

En utilisant les notations de l'exercice, on trouve :

1. $$\boxed{S = \frac{b \times c \times \sin(\widehat{BAC})}{2}}$$

2. On utilise la formule d'Al-Kashi, suivante :
   $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{BAC})$
   donc $2bc\cos(\widehat{BAC}) = b^2 + c^2 - a^2$ et comme $b \neq 0$ et $c \neq 0$ alors :
   $$\boxed{\cos(\widehat{BAC}) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$$

3. On a $\cos^2(\widehat{BAC}) + \sin^2(\widehat{BAC}) = 1$ donc $\sin^2(\widehat{BAC}) = 1 - \cos^2(\widehat{BAC})$
   or $\cos^2(\widehat{BAC}) = \dfrac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}$ donc $\sin^2(\widehat{BAC}) = 1 - \dfrac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}$
   donc $\sin^2(\widehat{BAC}) = \dfrac{4b^2c^2}{4b^2c^2} - \dfrac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} = \dfrac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}$
   $$\boxed{\sin^2(\widehat{BAC}) = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}}$$

4. On utilise l'identité remarquable : $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$
   $\sin^2(\widehat{BAC}) = \dfrac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} = \dfrac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}$
   donc $\sin^2(\widehat{BAC}) = \dfrac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4b^2c^2}$
   On utilise maintenant $b^2 + 2bc + c^2 = (b+c)^2$ et $-b^2 + 2bc - c^2 = -(b-c)^2$
   donc $\sin^2(\widehat{BAC}) = \dfrac{\left((b+c)^2 - a^2\right)\left(a^2 - (b-c)^2\right)}{4b^2c^2}$
   $$\boxed{\sin^2(\widehat{BAC}) = \frac{\left[(b+c)^2 - a^2\right]\left[a^2 - (b-c)^2\right]}{4b^2c^2}}$$

   De nouveau on utilise deux fois l'identité remarquable : $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$
   $\sin^2(\widehat{BAC}) = \dfrac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$
   Or comme p est le périmètre de ABC alors :
   $p = a + b + c$, $p - 2a = b + c - a$, $p - 2c = a + b - c$ et $p - 2b = a + c - b$ donc :
   $$\boxed{\sin^2(\widehat{BAC}) = \frac{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}{4b^2c^2}}$$

5. D'après le 1) on a $\sin(\widehat{BAC}) = \dfrac{2S}{bc}$
   d'après le 4) on a $\sin(\widehat{BAC}) = \sqrt{\dfrac{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}{4b^2c^2}} = \dfrac{\sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}}{2bc}$ car l'aire est positive.
   On obtient donc :
   $\dfrac{2S}{bc} = \dfrac{\sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}}{2bc} \Leftrightarrow S = \dfrac{1}{4}\sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}$

$$\boxed{S = \frac{1}{4}\sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}}$$

6. d_p est le demi-périmètre donc $p = 2d_p$
   On a donc $S = \dfrac{1}{4}\sqrt{2d_p(2d_p-2a)(2d_p-2b)(2d_p-2c)} = \dfrac{1}{4}\sqrt{16d_p(d_p-a)(d_p-b)(d_p-c)}$
   donc $S = \dfrac{\sqrt{16}}{4}\sqrt{d_p(d_p-a)(d_p-b)(d_p-c)} = \sqrt{d_p(d_p-a)(d_p-b)(d_p-c)}$

$$\boxed{S = \sqrt{d_p(d_p-a)(d_p-b)(d_p-c)}}$$

   C'est bien la formule de Héron.

   Partie II : Dans cette exemple, on a $d_p = 9$ donc
   $S = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2} = 6\sqrt{6}$ unités d'aire.