On souhaite, dans ce DM, démontrer et ensuite utiliser la formule de Héron.

Un peu d'Histoire : **http://serge.mehl.free.fr/chrono/Heron.html**

Formule de Héron :
Notation : ABC un triangle quelconque.
$AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$, p est le périmètre du triangle et d_p est son demi-périmètre.
S est l'aire du triangle.

La formule de Héron est : $S = \sqrt{d_p(d_p - a)(d_p - b)(d_p - c)}$

Partie I Démonstration de la formule :

1. Démontrer que $S = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{BAC})$
2. A l'aide d'une des formules d'AL-KASHI, démontrer que :
$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
3. En déduire que :
$$\sin^2(\widehat{BAC}) = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}$$
4. En déduire que :
$$\sin^2(\widehat{BAC}) = \frac{[(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2]}{4b^2c^2}$$
puis que :
$$\sin^2(\widehat{BAC}) = \frac{p(p - 2a)(p - 2c)(p - 2b)}{4b^2c^2}$$
5. A l'aide des questions 1) et 4) , démontrer que :
$$S = \frac{1}{4}\sqrt{p(p - 2a)(p - 2c)(p - 2b)}$$
6. En déduire la formule de Héron.

Partie II Applications :

On note ABC un triangle de longueur 5, 6 et 7.
Calculer son aire.