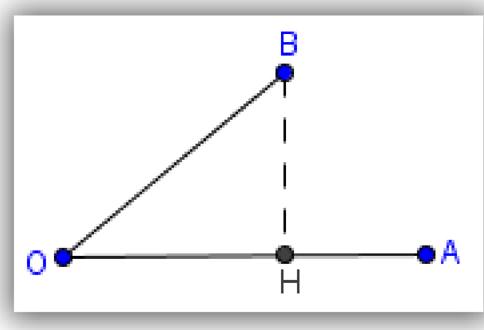
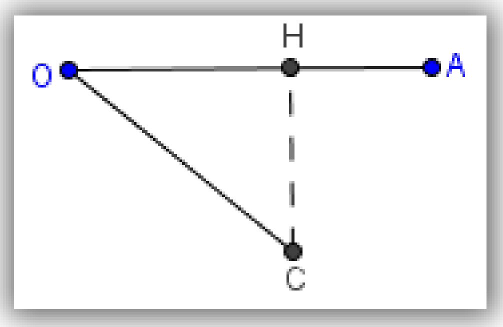
1. $\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\sin(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}) = \|\overrightarrow{v}\|\times\|\overrightarrow{u}\|\times\sin(-(\widehat{\overrightarrow{v};\overrightarrow{u}}))$
   $= -\|\overrightarrow{v}\|\times\|\overrightarrow{u}\|\times\sin(\widehat{\overrightarrow{v};\overrightarrow{u}}) = -\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v}$
2. On a $\alpha\in\mathbb{R}$
   $\overrightarrow{u}\star(\alpha\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|\times\|\alpha\overrightarrow{v}\|\times\sin(\widehat{\overrightarrow{u};\alpha\overrightarrow{v}}) = |\alpha|\,\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\sin(\widehat{\overrightarrow{u};\alpha\overrightarrow{v}})$
   ➠ Si $\alpha>0$ alors $|\alpha|=\alpha$ et $(\widehat{\overrightarrow{u};\alpha\overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}})$
   donc $\overrightarrow{u}\star(\alpha\overrightarrow{v}) = \alpha\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\sin(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}) = \alpha(\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v})$
   ➠ Si $\alpha<0$ alors $|\alpha|=-\alpha$ et $(\widehat{\overrightarrow{u};\alpha\overrightarrow{v}}) = (\widehat{-\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}})$
   donc $\overrightarrow{u}\star(\alpha\overrightarrow{v}) = -\alpha\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times(-\sin(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}})) = \alpha\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\sin(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}})$
   donc $\overrightarrow{u}\star(\alpha\overrightarrow{v}) = \alpha(\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v})$
   ➠ si $\alpha=0$ on a aussi $(0.\overrightarrow{u})\star\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}\star(0.\overrightarrow{v}) = 0(\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v}) = 0$
   Conclusion : Pour tout $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$ on a $\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{(\alpha v)} = \overrightarrow{(\alpha u)}\star\overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v})$
3. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires alors $\sin(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}) = \sin(0+k\pi) = 0$
   donc $\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v} = 0$
4. On a $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$ et $k\in\mathbb{Z}$
   ➠ Si $(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}) = \dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ alors $\sin(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}) = 1$ et $\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|$
   ➠ Si $(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}) = -\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ alors $\sin(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}) = -1$ et $\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|$
5. $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthogonal.
   $\overrightarrow{i}\star\overrightarrow{i} = 0$
   $\overrightarrow{j}\star\overrightarrow{j} = 0$
6. On note $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthogonormal.
   $\overrightarrow{i}\star\overrightarrow{j} = 1$
   $\overrightarrow{j}\star\overrightarrow{i} = -1$
7. Pour tout $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ on a $\sin(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}) \leq 1$
   donc $\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\sin(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}) \leq \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|$ car les normes sont positives.
   donc $\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v} \leq \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|$
8. $\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{u} = 0$ car $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$.
9. $(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})^2 + (\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v})^2$
   $= \|\overrightarrow{u}\|^2\times\|\overrightarrow{v}\|^2\cos^2(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}) + \|\overrightarrow{u}\|^2\times\|\overrightarrow{v}\|^2\sin^2(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}})$
   $= \|\overrightarrow{u}\|^2\times\|\overrightarrow{v}\|^2\,[\cos^2(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}) + \sin^2(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}})]$
   or $\cos^2(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}) + \sin^2(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}) = 1$
   donc $(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})^2 + (\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2\times\|\overrightarrow{v}\|^2 = \overrightarrow{u}^2\times\overrightarrow{v}^2$
10. Projection orthogonale

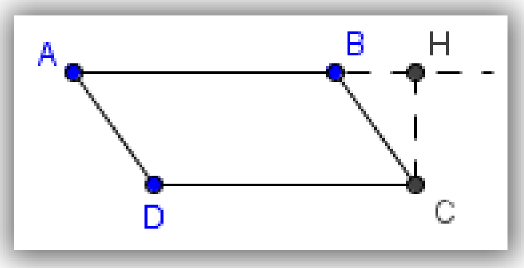


$\overrightarrow{OA}\star\overrightarrow{OB} = OA\times OB\times\sin(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = AO\times HB = \overrightarrow{OA}\star\overrightarrow{HB}$



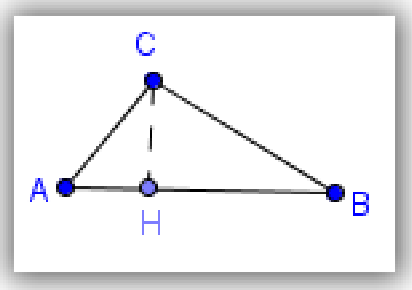
$\overrightarrow{OA} \star \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \sin(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = -AO \times HB = \overrightarrow{OA} \star \overrightarrow{HB}$

11. Aire



$|\overrightarrow{AB} \star \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} \star \overrightarrow{HC}| = AB \times HC =$ Aire du parallélogramme ABCD

12. Aire



$|\overrightarrow{AB} \star \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} \star \overrightarrow{HC}| = AB \times HC = 2 \times$ Aire du triangle ABC

13. $\overrightarrow{u} \star \overrightarrow{v} = (x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}) \star (x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j})$
$= xx'\overrightarrow{i} \star \overrightarrow{i} + xy'\overrightarrow{i} \star \overrightarrow{j} + yx'\overrightarrow{j} \star \overrightarrow{i} + yy'\overrightarrow{j} \star \overrightarrow{j}$
Or $\overrightarrow{i} \star \overrightarrow{i} = 0$ et $\overrightarrow{j} \star \overrightarrow{j} = 0$ et $\overrightarrow{i} \star \overrightarrow{j} = 1$ et $\overrightarrow{j} \star \overrightarrow{i} = -1$
donc $\overrightarrow{u} \star \overrightarrow{v} = xy' - yx'$
14. $\overrightarrow{AB}(1;7)$ et $\overrightarrow{AC}(-3;5)$
donc $|\overrightarrow{AB} \star \overrightarrow{AC}| = |1 \times 5 - 7 \times (-3)| = |5 + 21| = 26$
L'aire de $ABC = \dfrac{26}{2} = 13$ unités d'aire.
15. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$
16. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$
17. $-3 \times (-6) - 4 \times 4,5 = 18 - 18 = 0$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
18. $2 \times (-2) + (-1) \times (-4) = 0$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.
19. Tableau récapitulatif :

Produit scalaire de deux vecteurs	Produit étoile de deux vecteurs
Définition $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\parallel\overrightarrow{u}\parallel\times\parallel\overrightarrow{v}\parallel\times\cos(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}})$	Définition $\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v}=\parallel\overrightarrow{u}\parallel\times\parallel\overrightarrow{v}\parallel\times\sin(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}})$
Commutativité $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$	Commutativité $\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v}=-\overrightarrow{v}\star\overrightarrow{u}$
Vecteurs colinéaires ➠ Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de même sens : alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\parallel\overrightarrow{u}\parallel\times\parallel\overrightarrow{v}\parallel$ ➠ Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de sens contraire : alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-\parallel\overrightarrow{u}\parallel\times\parallel\overrightarrow{v}\parallel$	Vecteurs colinéaires $\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v}=0$
Vecteurs orthogonaux $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$	Vecteurs orthogonaux ➠ Si $(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}})=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$: alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\parallel\overrightarrow{u}\parallel\times\parallel\overrightarrow{v}\parallel$ ➠ Si $(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}})=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$: alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-\parallel\overrightarrow{u}\parallel\times\parallel\overrightarrow{v}\parallel$
Linéarité $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{(\alpha v)}=\overrightarrow{(\alpha u)}\cdot\overrightarrow{v}=\alpha(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})$	Linéarité $\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{(\alpha v)}=\overrightarrow{(\alpha u)}\star\overrightarrow{v}=\alpha(\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v})$
Produit scalaire d'un vecteur par lui même $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=\parallel\overrightarrow{u}\parallel^2$	Déterminant d'un vecteur par lui même $\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{u}=0$
Projection orthogonal Si H est le projeté orthogonal de B sur (OA) alors :$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$	Projection orthogonal Si H est le projeté orthogonal de B sur (OA) alors :$\overrightarrow{OA}\star\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\star\overrightarrow{HB}$
Formule avec coordonnées $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=xx'+yy'$	Formule avec coordonnées $\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{u}=xy'-x'y$