Problème :

On va dans ce problème, étudier un outils mathématique que l'on va nommer pour l'instant **le produit étoile de deux vecteurs**. Comme pour le produit scalaire nous allons partir d'une définition, lui trouver des propriétés et d'autres définitions équivalentes.

Ce DM va juste permettre de voir la différence si on remplace le $\cos(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}})$ par le $\sin(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}})$ dans le produit scalaire et de s'entraîner à la démonstration.
Plus tard vous verrez que ce produit étoile, se nomme le **déterminant de deux vecteurs**.

Les démonstrations devront être bien rédigées et précises.

On considère, dans tout le devoir, que le produit étoile est distributif par rapport à l'addition et la soustraction.

$$\text{c'est à dire que } \overrightarrow{u}\star(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{w}$$

Définition du produit étoile :

> Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. On nomme produit étoile de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre que l'on note $\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v}$ défini par :
>
> $$\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v} = \parallel \overrightarrow{u} \parallel \times \parallel \overrightarrow{v} \parallel \times \sin(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}})$$

1. Communtativité :
   Démontrer que pour tout $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ on a $\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v}\star\overrightarrow{u}$
2. Linéarité :
   Démontrer que pour tout $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$ on a $\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{(\alpha v)} = \overrightarrow{(\alpha u)}\star\overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v})$
3. Vecteurs colinéaires :
   Démontrer que si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires alors $\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v} = 0$
4. Vecteurs orthogonaux :
   On note $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs orthogonaux. Démontrer que :
   $$\overrightarrow{u}\star\overrightarrow{v} = \begin{cases} \parallel \overrightarrow{u} \parallel \times \parallel \overrightarrow{v} \parallel & \text{si} \quad (\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}) = \dfrac{\pi}{2}+2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z} \\ -\parallel \overrightarrow{u} \parallel \times \parallel \overrightarrow{v} \parallel & \text{si} \quad (\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}) = -\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$
5. Application :
   On note $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthogonal.
   Calculer $\overrightarrow{i}\star\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}\star\overrightarrow{j}$
6. Application :
   On note $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthogonnormal.
   Calculer $\overrightarrow{i}\star\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{j}\star\overrightarrow{i}$

7. Démontrer que pour tout $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ on a $\overrightarrow{u} \star \overrightarrow{v} \leq \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \|$

8. Que peut-on dire de $\overrightarrow{u} \star \overrightarrow{u}$?

9. Lien avec le produit scalaire :
   Démontrer que pour tout $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ on a $(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 + (\overrightarrow{u} \star \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 \times \overrightarrow{v}^2$

10. Projection orthogonale :
    On note O, A et B les points du plan tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$.
    Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA).
    Démontrer que $\overrightarrow{OA} \star \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \star \overrightarrow{HB}$ (Faire deux schémas avec $(\widehat{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}}) > 0$ et $(\widehat{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}}) < 0$)

11. Application:
    Déduire de la question 9) que Si $ABCD$ est un parallélogramme alors
    $|\overrightarrow{AB} \star \overrightarrow{AC}| =$ Aire du parallélogramme $ABCD$

12. Application:
    Déduire de la question 9) que Si ABC est un triangle alors $|\overrightarrow{AB} \star \overrightarrow{AC}| = 2 \times$ Aire du triangle ABC

13. On note $\overrightarrow{u}(x; y)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y')$ dans un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
    Démontrer que $\overrightarrow{u} \star \overrightarrow{v} = xy' - x'y$

14. Application:
    Si $A(2; -3)$, $B(3; 4)$ et $C(-1; 2)$, calculer l'aire du triangle ABC.

15. A l'aide du produit étoile de deux vecteurs trouver une formule sur les coordonnées prouvant que deux vecteurs sont colinéaires.

16. A l'aide du produit scalaire de deux vecteurs trouver une formule sur les coordonnées prouvant que deux vecteurs sont orthogonaux.

17. Application :
    Les vecteurs $\overrightarrow{u}(-3; 4)$ et $\overrightarrow{v}(4,5; -6)$ sont-ils orthogonaux ou colinéaires ?

18. Application :
    Les vecteurs $\overrightarrow{u}(2; -1)$ et $\overrightarrow{v}(-2; -4)$ sont-ils orthogonaux ou colinéaires ?

19. Faire un tableau de comparaison entre le **produit scalaire de deux vecteurs** et le **produit étoile de deux vecteurs**.

Produit scalaire de deux vecteurs	Produit étoile de deux vecteurs
Définition	Définition
Commutativité	Commutativité
Vecteurs colinéaires	Vecteurs colinéaires
Vecteurs orthogonaux	Vecteurs orthogonaux
Linéarité	Linéarité
Produit scalaire d'un vecteur par lui même	Déterminant d'un vecteur par lui même
Projection orthogonal	Projection orthogonal
Formule avec coordonnées	Formule avec coordonnées

Attention : Les résultats que l'on vient de trouver, sur le déterminant de deux vecteurs (appelé produit étoile dans ce devoir) ne sont pas à utiliser en devoir car ce ne sont pas des résultats du cours. C'était juste intéressant de voir la différence lorsqu'on remplace le cos par un sin dans la formule du produit scalaire.

❄ ❄ Bon courage ❄ ❄