# Les Suites

# ( En première S )

Dernière mise à jour : Dimanche 15 Avril 2007

Vincent OBATON, Enseignant au lycée Stendhal de Grenoble (Année 2006-2007)

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

**Stendhal**

# Table des matières


**1 Définition et Vocabulaire** **4**
1.1 Définition . . . 4
1.2 Vocabulaire . . . 4
1.3 Différentes façons de définir une suite . . . 4
1.3.1 $u_n$ est en fonction de $n$ . . . 4
1.3.2 $u_n$ est en fonction de $u_{n-1}$ (Suites récurrentes) . . . 5
1.3.3 Autres possibilités . . . 5

**2 Représentation graphique** **5**
2.1 Suites en fonction de $n$ . . . 5
2.2 Suites définies par récurrence . . . 5
2.3 Autres cas . . . 6

**3 Variations d'une suite** **7**
3.1 Suite croissante . . . 7
3.2 Suite décroissante . . . 7
3.3 Suite constante . . . 7
3.4 Suite monotone . . . 7

**4 Suite majorée, minorée ou bornée** **7**
4.1 Suite majorée . . . 7
4.2 Suite minorée . . . 8
4.3 Suite bornée . . . 8

**5 Les suites arithmétiques** **8**
5.1 Définition et vocabulaire . . . 8
5.2 Différentes formules . . . 8
5.3 Variations . . . 8
5.4 Somme des p premiers termes . . . 8

**6 Les suites géométriques** **9**
6.1 Définition et vocabulaire . . . 9
6.2 Différentes formules . . . 9
6.3 Variations . . . 9
6.4 Somme des p premiers termes . . . 10

**7 Limite d'une suite et convergence** **11**
7.1 Définition . . . 11
7.2 Représentation graphique . . . 11
7.3 Suites arithmétiques . . . 11
7.4 Suites géométriques . . . 11
7.5 Le théorème des gendarmes . . . 11

# 1 Définition et Vocabulaire

## 1.1 Définition

Une suite est une application dont tous les antécédents sont des entiers naturels. Au lieu de noter $x$ les antécédents, on les note $n$ et au lieu de noter $f(n)$ l'image de $n$ par $f$ on notera $u_n$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'ensemble des images $u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Exemples :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $\forall n \in \mathbb{N}$ , $u_n = n^2 - 4n + 1$
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $v_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$
3. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $w_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ , $w_n = w_{n-1} + 1$
4. $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $t_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $t_{n+1} = \dfrac{t_n - 1}{t_n + 1}$

## 1.2 Vocabulaire

Attention il ne faut pas confondre $u_n$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u$ ou $(u_n)$.

- $u_n$ représente le terme qui est au rang ( à la place ) $n$ ou le n$^{\text{ième}}$ terme de la suite.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $u$ ou $(u_n)$ représente la suite avec tous ses termes.
- $n$ est l'indice de $u_n$.
- $u_{n-1}$ représente le terme précédent de $u_n$ ou le suivant de $u_{n-2}$
- $u_{n+1}$ représente le terme suivant de $u_n$ ou le précédent de $u_{n+2}$

Exemples

1. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = (-1)^n \times n$
   (a) Calculer $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
   (b) Exprimer $u_{n+1}$ et $u_{n-1}$ en fonction de $n$.
   (c) Exprimer $u_{2n}$ et $u_{2n+1}$ en fonction de $n$.
2. On note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_1 = 1$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n + 1}{v_n}$
   (a) Calculer les cinq premiers termes de la suite.
   (b) Exprimer $v_n$ en fonction de $v_{n-1}$.
   (c) Exprimer $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$.

## 1.3 Différentes façons de définir une suite

### 1.3.1 $u_n$ est en fonction de $n$

$$\boxed{\text{Il existe } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ une fonction telle que pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a } u_n = f(n)}$$

Exemples :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 4n^2 + 3n - 5$
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = \dfrac{3n - 1}{6 - 4n}$
3. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_n = \sqrt{2n - 7}$

#### 1.3.2 $u_n$ est en fonction de $u_{n-1}$ (Suites récurrentes)

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Il existe } f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ une fonction telle que pour tout } n\in\mathbb{N} \text{ on a} \\ u_1=\alpha \text{ et } u_n=f(u_{n-1}) \text{ ou } u_0=\alpha \text{ et } u_{n+1}=f(u_n)\end{array}}$$

Exemples :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=4u_n^2+3u_n-5$
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_1=7$ et $v_n=\dfrac{3v_{n-1}-1}{6-4v_{n-1}}$
3. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_1=2$ et $w_{n+1}=w_n+w_{n-1}$

#### 1.3.3 Autres possibilités

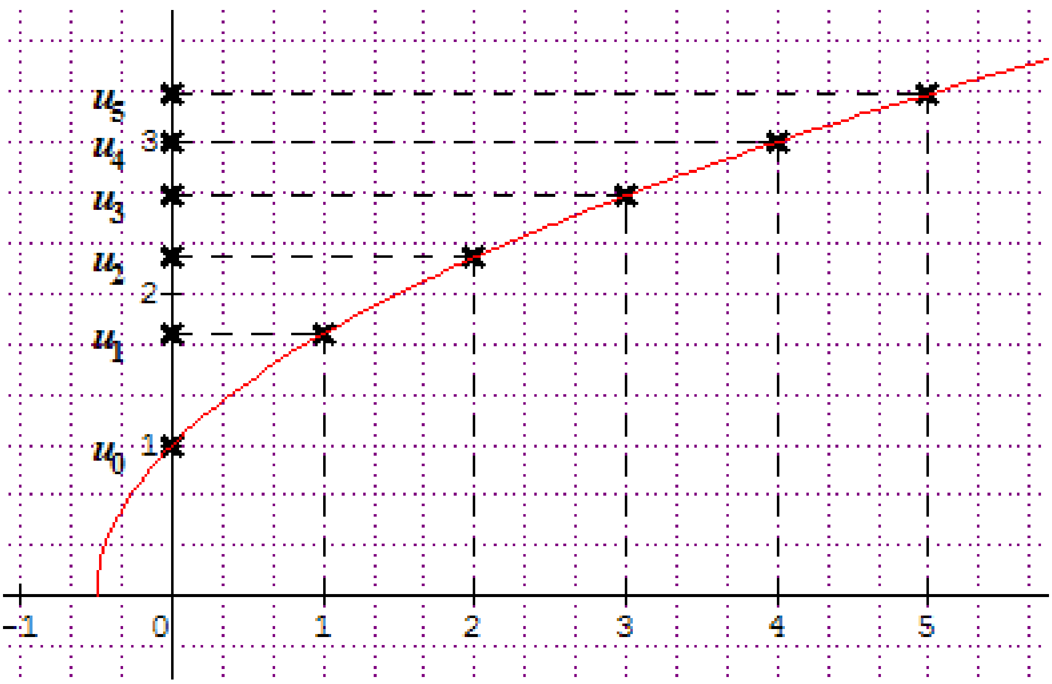
Il y a certaines suites qui ne sont pas définies en fonction de $n$ ni en fonction des termes précédents.
Exemples :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n$ est la $n^{\text{ième}}$ décimale de $\pi$.
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n$ est la $(n+1)^{\text{ième}}$ décimale de $\dfrac{22}{3}$.

## 2 Représentation graphique

### 2.1 Suites en fonction de $n$

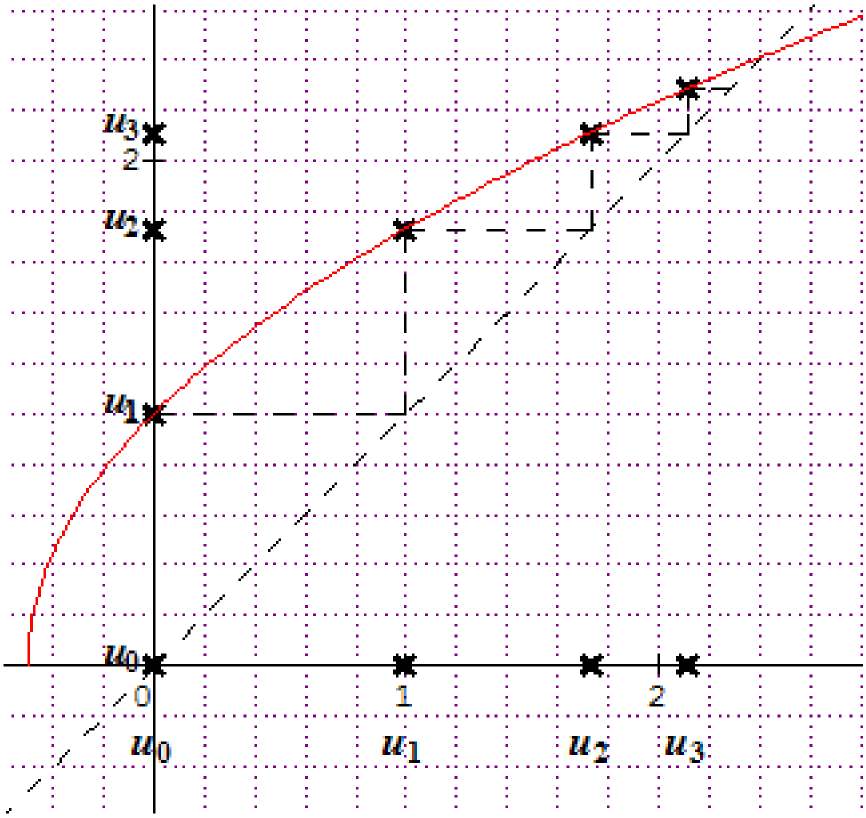
Pour représenter graphiquement une suite définie en fonction de $n$, il suffit de représenter l'image de chacun des antécédents entiers positifs.
Exemple :
On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n=\sqrt{2n+1}$
On commence par étudier la fonction $f:x\mapsto\sqrt{2x+1}$ avec précision dans un repère orthonormé.




### 2.2 Suites définies par récurrence

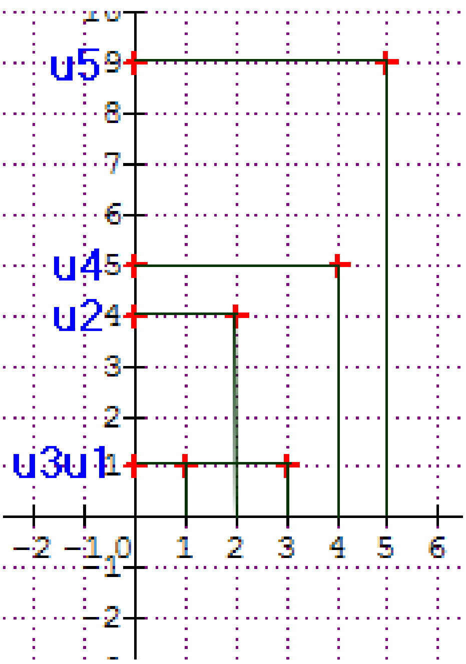
Pour représenter graphiquement une suite définie par récurrence, il suffit de représenter l'image de du premier terme et ensuite d'utiliser la droite d'équatin $y=x$ pour replacer l'image sur la droite des abscisses, puis de tracer l'image de ce nouveau terme. Ainsi de suite ...
Exemple :

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 1}$
On commence par étudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x+1}$ avec précision dans un repère orthonormé.




## 2.3 Autres cas

Il faut tracer les termes un par un sur le repère.
Exemple : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n$ est la $n^{\text{ième}}$ décimale de $\pi$.



# 3 Variations d'une suite

## 3.1 Suite croissante

Définition 1 :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$

Définition 2 :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel $n$, $u_n > 0$
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si
$\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$

Exemples :

## 3.2 Suite décroissante

Définition 1 :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$

Définition 2 :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel $n$, $u_n > 0$
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si
$\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

Exemples :

## 3.3 Suite constante

Définition :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si et seulement si
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$

## 3.4 Suite monotone

Définition :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone si et seulement si
elle est soit croissante, soit décroissante ou soit monotone.

Exemples :

# 4 Suite majorée, minorée ou bornée

## 4.1 Suite majorée

Définition :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée si et seulement si
il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \alpha$

Exemple :

### 4.2 Suite minorée

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée si et seulement si
il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \alpha$

Exemple :

### 4.3 Suite bornée

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée si et seulement si
il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\beta \leq u_n \leq \alpha$

Exemple :

## 5 Les suites arithmétiques

### 5.1 Définition et vocabulaire

Définition :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique si et seulement si pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours la même constante $r$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$ avec $r \in \mathbb{R}$

### 5.2 Différentes formules

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_p$, $p \in \mathbb{N}$
Formule 1 :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_p + (n-p)r}$$

Cas particuliers :
➠ Si le premier terme est $u_0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$
➠ Si le premier terme est $u_1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + (n-1)r$

**Comment démontrer qu'une suite est arithmétique ?**
Pour démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, il faut étudier la différence entre $u_{n+1}$ et $u_n$.
Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est une constante ( résultat indépendant de $n$).
Exemple :

### 5.3 Variations

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_p$, $p \in \mathbb{N}$
$u_{n+1} - u_n = (u_p + (n+1-p)r) - (u_p + (n-p)r) = r$
Conclusion :

Si $r > 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Si $r < 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Si $r = 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

### 5.4 Somme des p premiers termes

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_1$, $p \in \mathbb{N}$
On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n$
On cherche à calculer $S_n$ en fonction de $n$.

**Première étape** Exprimons $S_n$ en fonction de $u_1$

$$S_n = (u_1) + (u_1 + r) + (u_1 + 2r) + \ldots + (u_1 + (n-2)r) + (u_1 + (n-1)r)$$

**Deuxième étape** Exprimons $S_n$ en fonction de $u_n$

$$S_n = (u_n - (n-1)r) + (u_n - (n-2)r) \ldots + (u_n - 2r) + (u_n - r) + (u_n)$$

**Troisième étape** Additionnons les deux formules ci-dessus :
$2S_n = n(u_1 + u_n)$ donc on obtient :

$$\boxed{S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}}$$

Formule plus générale :

$$\boxed{S_n = \frac{\text{Nombre de termes} \times (\text{Premier terme} + \text{Dernier terme})}{2}}$$

Exemple :
$1 + 2 + 3 + 5 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
Donc si on souhaite calculer la somme des entiers positifs juqu'à 45000 on obtient :
$1 + 2 + 3 + 5 + \ldots + 45000 = \dfrac{45000(45000+1)}{2} = 1012522500$

# 6 Les suites géométriques

## 6.1 Définition et vocabulaire

Définition :

| |
|---|
| Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique si et seulement si pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par la même constante $q$. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n$ avec $q \in \mathbb{R}$ |

## 6.2 Différentes formules

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_p$, $p \in \mathbb{N}$
Formule 1 :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_p \times q^{n-p}}$$

Cas particuliers :
➠ Si le premier terme est $u_0$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n$
➠ Si le premier terme est $u_1$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_1 \times q^{n-1}$

**Comment démontrer qu'une suite est géométrique ?**
Pour démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, il faut étudier le quotient entre $u_{n+1}$ et $u_n$.
Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est une constante ( résultat indépendant de $n$).
Exemple :

## 6.3 Variations

➠ On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_p$, $p \in \mathbb{N}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_p \times q^{n+1-p}}{u_p \times q^{n-p}} = q$$

Conclusion :
Il y a deux cas à étudier :
Premier cas : Si $u_p$ positif

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } q \geq 1, \text{ alors } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}\\ \text{Si } 0 < q \leq 1, \text{ alors } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}\end{array}}$$

Premier cas : Si $u_p$ négatif

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } q \geq 1, \text{ alors } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}\\ \text{Si } 0 < q \leq 1, \text{ alors } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}\end{array}}$$

➟ On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q < 0$ et de premier terme $u_p$, $p \in \mathbb{N}$
Les termes de la suites sont alternativement positifs et négatifs, donc la suite n'est pas monotone.

## 6.4 Somme des p premiers termes

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_1$, $p \in \mathbb{N}$
On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n$
On cherche à calculer $S_n$ en fonction de $n$.

**Première étape** Exprimons $S_n$ en fonction de $u_1$

$$S_n = u_1 + q \times u_1 + q^2 \times u_1 + \ldots + q^{n-1}u_1$$

**Deuxième étape** Exprimons $q \times S_n$ en fonction de $u_1$

$$q \times S_n = q \times u_1 + q^2 \times u_1 + q^3 \times u_1 + \ldots + q^n u_1$$

**Troisième étape** Calculons $S_n - q \times S_n$ :
$S_n - q \times S_n = u_1 - q^n \times u_1 = u_1(1 - q^n)$ donc $(1 - q)S_n = u_1(1 - q^n)$
donc on obtient :
➟ Si $q \neq 1$

$$\boxed{S_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$

➟ Si $q = 1$

$$\boxed{S_n = nu_1}$$

Formule plus générale :

$$\boxed{S_n = \text{Premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{Nombre de termes}}}{1 - q}}$$

Exemple :
$2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n = 2 \times \dfrac{1 - 2^n}{1 - 2} = -2(1 - 2^n)$
$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n = 1 \times \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = -(1 - 2^{n+1})$
Donc si on souhaite calculer la somme des multiples de 2 jusqu'à $4096 = 2^{12}$ :
$1 + 2 + 3 + 5 + \ldots + 2^{12} = -(1 - 2^{13}) = 8191$

# 7 Limite d'une suite et convergence

## 7.1 Définition

## 7.2 Représentation graphique

## 7.3 Suites arithmétiques

## 7.4 Suites géométriques

## 7.5 Le théorème des gendarmes