Fiche 1

Les trinômes du second degré.

1 Définitions

1.1 Les trinômes du second degré

Un trinôme du second degré est un polynôme de degré 2 de la forme :

$$P(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}$$

1.2 Forme canonique

Si P est un polynôme tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ alors on peut écrire P sous forme canonique :

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \qquad \text{(Forme 1)}$$

Ou

$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \qquad \text{(Forme 2)}$$

Il n'est pas utile de savoir par ❤ ces deux formules. Il faut surtout savoir retrouver les formes canoniques par le calcul.

2 Les équations du second degré à une inconnue

Soit $ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré.

Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c = 0$

alors $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0$

Il y a donc deux solutions dans $\mathbb{R}$, $x_1 = 0$ et $x_2 = -\dfrac{b}{a}$

Si $a \neq 0$, $b = 0$ et $c \neq 0$

alors on doit résoudre : $ax^2 + c = 0$

➠ Si $\dfrac{c}{a} > 0$ alors il n'y a aucune solution dans $\mathbb{R}$ et $S = \emptyset$

➠ Si $\dfrac{c}{a} < 0$ alors il y a deux solutions dans $\mathbb{R}$, $x_1 = -\sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|}$ et $x_2 = \sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|}$

Si $a \neq 0$, $b = 0$ et $c = 0$

Alors on doit résoudre : $ax^2 = 0$

Il y a donc une solution unique dans $\mathbb{R}$, $x = 0$

Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$

On note **Discriminant du trinôme** le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$

Alors il y a trois cas possibles pour résoudre l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$

➠ Premier cas : Si $\Delta = 0$, il y a qu'une seule solution dans $\mathbb{R}$ et $S = \{-\dfrac{b}{2a}\}$

➠ Deuxième cas : Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R}$ et $S = \emptyset$

➠ Troisième cas : Si $\Delta > 0$, Il y a donc deux solutions dans $\mathbb{R}$, $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

3 Factorisation des trinômes du second degré

Théorème (**Factorisation des trinômes du second degré**)
On note $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré avec $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant du trinôme

Alors

➠ Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ avec $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$

➠ Si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

➠ Si $\Delta < 0$ alors on ne peut pas factoriser $ax^2 + bx + c$ dans $\mathbb{R}$

4 Déterminer le signe d'un trinôme du second degré

➠ Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ avec $x = \dfrac{-b}{2a}$
Donc le tableau de signe de $ax^2 + bx + c$ est :

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$a(x - x_1)^2$		Signe de a	0	Signe de a	

➠Si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
Donc le tableau de signe de $ax^2 + bx + c$ est :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$a(x - x_1)(x - x_2)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

➠ Si $\Delta < 0$ alors $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{|\Delta|}{4a^2}\right]$
donc ax^2+bx+c est toujours du signe de a et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
ax^2+bx+c	Signe de a

5 Racines des polynômes de degré supérieur à 2

Théorème (Factorisation)

> Si α est une racine du polynôme P alors il existe un unique polynôme Q tel que :
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}\ , \quad P(x) = (x-\alpha) \times Q(x) \qquad \text{avec } d^\circ Q = d^\circ P - 1$$

6 Les fonctions polynômes du second degré

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$

- Si $a > 0$ alors le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

- Si $a < 0$ alors le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$	$\searrow$	

- La fonction $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ admet un extrémum en $x = \dfrac{-b}{2a}$

> La représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ est une parabole de sommet $S\left(\dfrac{-b}{2a} ; f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$ tournée vers le haut si $a > 0$ et tournée vers le bas si $a < 0$. Cette parabole admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$