Les limites

(En première S)

Dernière mise à jour : Mercredi 14 février 2007

Vincent OBATON, Enseignant au lycée Stendhal de Grenoble (Année 2006-2007)

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Table des matières

1 Activités préparatoires

1.1 Limites en $+\infty$ et en $-\infty$

Fiche d'activités ✎ ActivitesPrepaLimites1.pdf ✐

1.2 Limites en a

Fiche d'activités ✎ ActivitesPrepaLimites2.pdf ✐

Fiche d'activités ✎ ActivitesPrepaLimites3.pdf ✐

2 Limites en $+\infty$

2.1 Définition intuitive

Les trois résultats principaux sont les suivants :

Lorsque x devient **de plus en plus grand en valeur positive** ($x \to +\infty$) :

➠ Si $f(x)$ devient **de plus en plus grand en valeur positive**,on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
➠ Si $f(x)$ devient **de plus en plus grand en valeur négative**,on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
➠ Si $f(x)$ devient **de plus en plus proche d'un réel** l,on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

Lecture des limites :

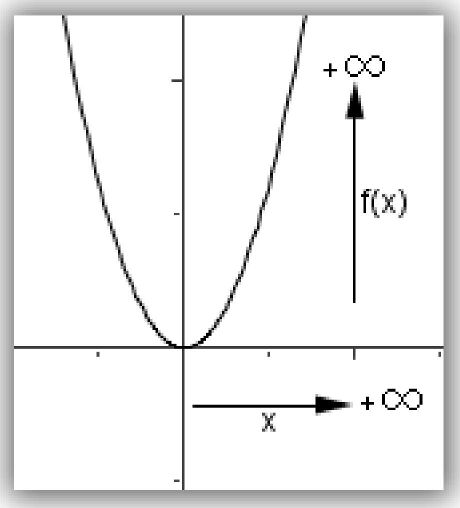
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ se lit :
  1. f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$
  2. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est $+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ se lit :
  1. f a pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$
  2. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est $-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ se lit :
  1. f a pour limite l lorsque x tend vers $+\infty$
  2. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est l

2.2 Définition mathématique

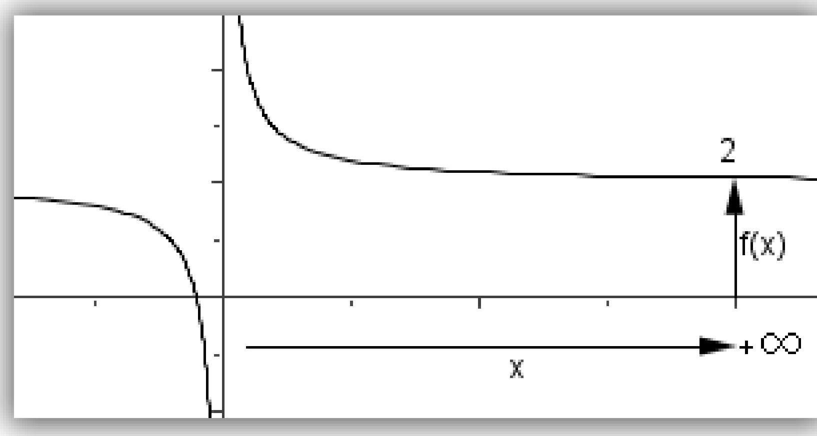
➠ Si $\forall m \in \mathbb{R}^+$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq a \Rightarrow f(x) \geq m$ alors on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
➠ Si $\forall m \in \mathbb{R}^-$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq a \Rightarrow f(x) \leq m$ alors on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
➠ Si $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq a \Rightarrow f(x) \in]l-\epsilon; l+\epsilon[$ alors on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

2.3 Exemples

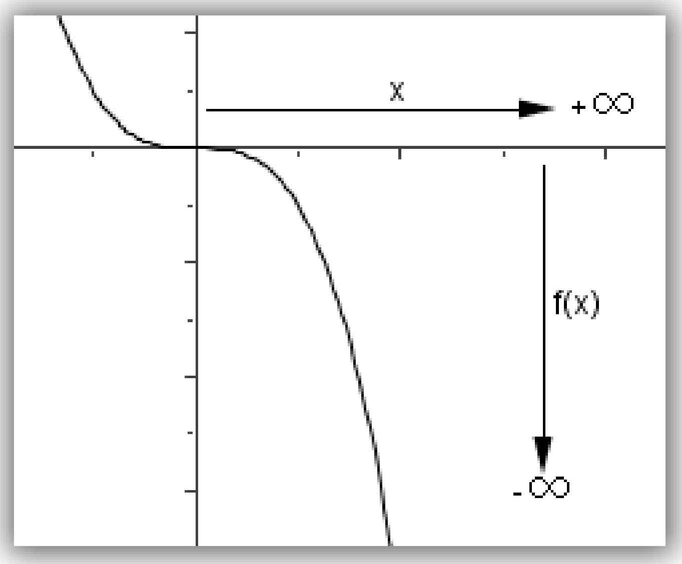
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$



2. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{x} = 2$



3. $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$



3 Limites en $-\infty$

3.1 Définition intuitive

Les trois résultats principaux sont les suivants :

Lorsque x devient **de plus en plus grand en valeur négative** ($x \to -\infty$) :
(La valeur absolue de x est très grande mais x est négatif)

➠ Si $f(x)$ devient **de plus en plus grand en valeur positive**,on note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
➠ Si $f(x)$ devient **de plus en plus grand en valeur négative**,on note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
➠ Si $f(x)$ devient **de plus en plus proche d'un réel** l,on note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$

Lecture des limites :

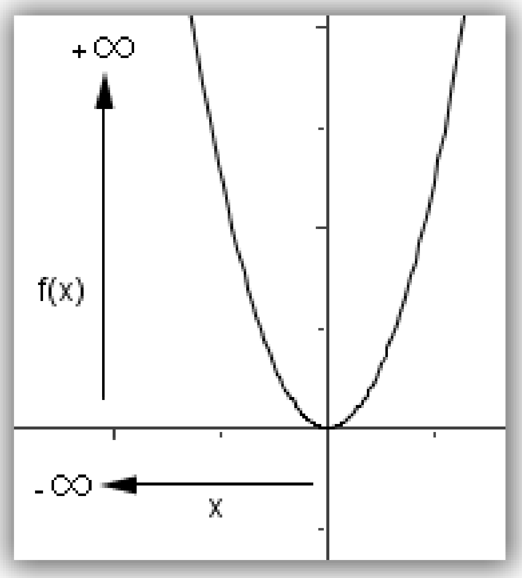
– $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ se lit :
  1. f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$
  2. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ est $+\infty$
– $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ se lit :
  1. f a pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$
  2. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ est $-\infty$
– $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ se lit :
  1. f a pour limite l lorsque x tend vers $-\infty$
  2. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ est l

3.2 Définition mathématique

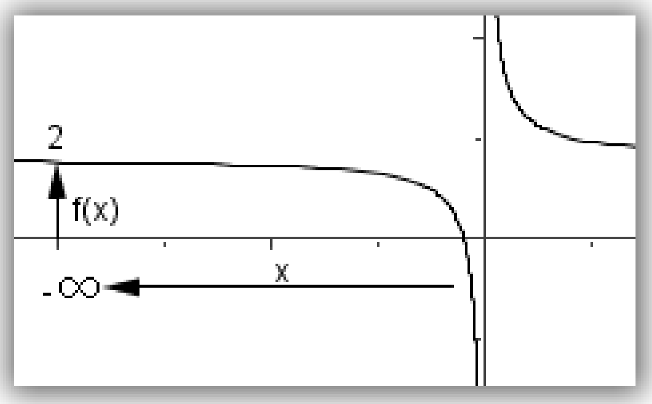
➠ Si $\forall m \in \mathbb{R}^+$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq a \Rightarrow f(x) \geq m$ alors on note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
➠ Si $\forall m \in \mathbb{R}^-$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq a \Rightarrow f(x) \leq m$ alors on note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
➠ Si $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq a \Rightarrow f(x) \in]l-\epsilon; l+\epsilon[$ alors on note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$

3.3 Exemples

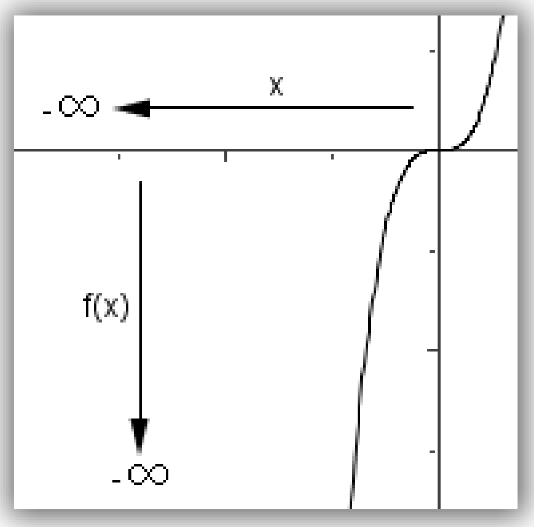
1. $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$



2. $\lim_{x \to -\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2$



3. $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$



4 Limites en a

4.1 Définition intuitive

On note f une fonction. On note $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \in D_f$ ou a est une borne de D_f. Les trois résultats principaux sont les suivants :

Lorsque x prend **des valeurs de plus en plus proche de** a ($x \to a$) :

➠ Si $f(x)$ devient **de plus en plus grand en valeur positive**,on note :$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$
➠ Si $f(x)$ devient **de plus en plus grand en valeur négative**,on note :$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$
➠ Si $f(x)$ devient **de plus en plus proche d'un réel** l,on note :$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

Lecture des limites :
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ se lit :
  1. f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a
  2. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est $+\infty$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ se lit :
  1. f a pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers a
  2. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est $-\infty$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ se lit :
  1. f a pour limite l lorsque x tend vers a
  2. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est l

4.2 Définition mathématique

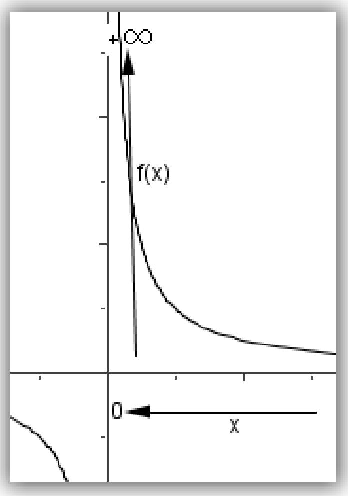
➠ Si $\forall m \in \mathbb{R}^+$, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x \in]a-\delta; a+\delta[\Rightarrow f(x) \geq m$ alors on note :$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$
➠ Si $\forall m \in \mathbb{R}^-$, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x \in]a-\delta; a+\delta[\Rightarrow f(x) \leq m$ alors on note :$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$
➠ Si $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x \in]a-\delta; a+\delta[\Rightarrow f(x) \in]l-\epsilon; l+\epsilon[$ alors on note :$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

Remarque :

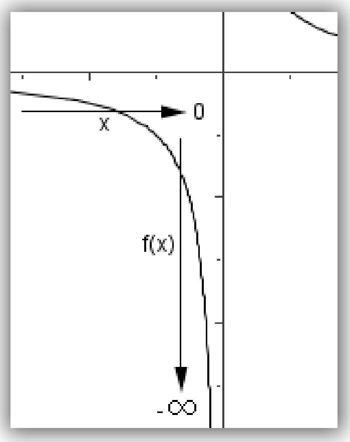
Si $a \in D_f$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

4.3 Exemples

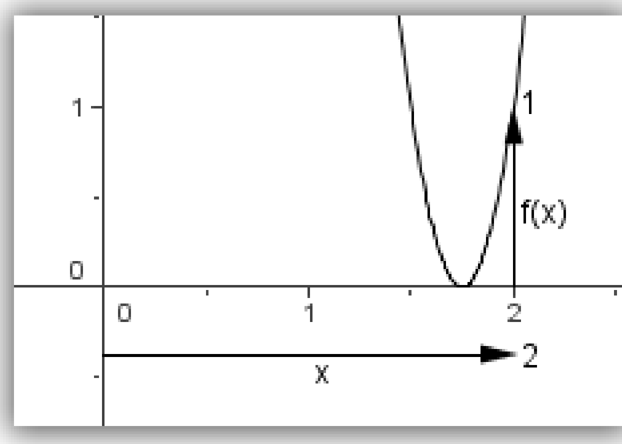
1. $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$



2. $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$

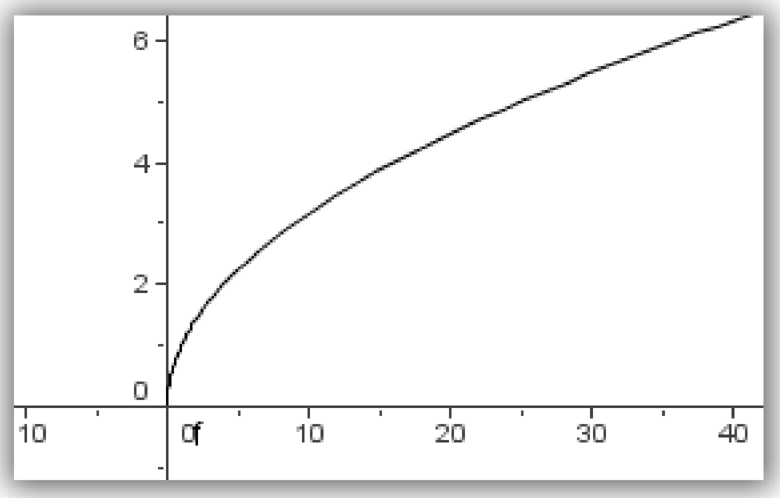


3. $\displaystyle\lim_{x\to 2}(4x-7)^2 = 1$

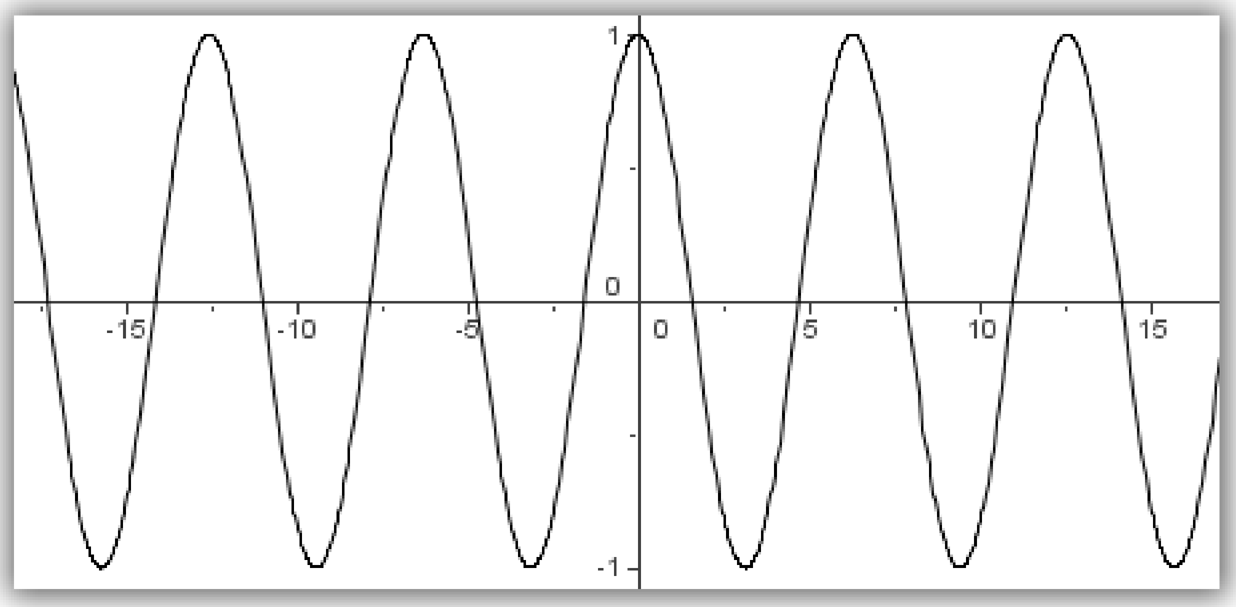


Remarque :
Certaines fonctions n'ont pas de limite. Exemples :

1. $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{x}$ n'existe pas.



2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos(x)$ n'existe pas.



3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos(x)$ n'existe pas.
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(x)$ n'existe pas.

5 Opérations sur les limites

5.1 Opérations usuelles

5.1.1 Limite d'une somme

La limite de $f+g$ en fonction de la limite de f et de celle de g, est donnée dans le tableau ci-dessous :

$+$	$\lim f(x) = +\infty$	$\lim f(x) = -\infty$	$\lim f(x) = l$
$\lim g(x) = +\infty$	$\lim f(x) + g(x) = +\infty$	$\lim f(x) + g(x) = ?$	$\lim f(x) + g(x) = +\infty$
$\lim g(x) = -\infty$	$\lim f(x) + g(x) = ?$	$\lim f(x) + g(x) = -\infty$	$\lim f(x) + g(x) = -\infty$
$\lim g(x) = l'$	$\lim f(x) + g(x) = +\infty$	$\lim f(x) + g(x) = -\infty$	$\lim f(x) + g(x) = l + l'$

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} 3 + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x} = 3}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + x + 3$ est une forme indéterminée. Il va falloir trouver une autre méthode pour trouver cette limite (voir plus bas).
- $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0} 5x = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0} 10 + \dfrac{2}{x^2} + 5x = +\infty}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 + 5x + 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3x^2+5x+2} = 0$
  donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3x^2+5x+2} + 5x = +\infty}$

5.1.2 limite d'un produit

La limite de $f \times g$ en fonction de la limite de f et de celle de g, est donnée dans les tableaux ci-dessous :

$\times$	$\lim f(x) = +\infty$	$\lim f(x) = -\infty$	$\lim f(x) = l \neq 0$
$\lim g(x) = +\infty$	$\lim f(x) \times g(x) = +\infty$	$\lim f(x) \times g(x) = -\infty$	$\lim f(x) \times g(x) = \pm\infty$
$\lim g(x) = -\infty$	$\lim f(x) \times g(x) = -\infty$	$\lim f(x) \times g(x) = +\infty$	$\lim f(x) \times g(x) = \pm\infty$
$\lim g(x) = l' \neq 0$	$\lim f(x) \times g(x) = \pm\infty$	$\lim f(x) \times g(x) = \pm\infty$	$\lim f(x) \times g(x) = l \times l'$

Exemples :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} 5x + 3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x^2 + 4 = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} (5x+3)(-3x^2+4) = -\infty}$
- $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$ et $\lim\limits_{x \to 3} (x^3 + 3) = 90$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 3} x^2(x^3+3) = 810}$

$\times$	$\lim f(x) = +\infty$	$\lim f(x) = -\infty$	$\lim f(x) = l \neq 0$
$\lim g(x) = 0$	$\lim f(x) \times g(x) =?$	$\lim f(x) \times g(x) =?$	$\lim f(x) \times g(x) = 0$

Exemple :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \dfrac{1}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + \dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0}$

5.1.3 limite de l'inverse

La limite de $\dfrac{1}{f(x)}$ en fonction de la limite de f , est donnée dans les tableaux ci-dessous :

$f(x)$	$\lim f(x) = +\infty$	$\lim f(x) = -\infty$	$\lim f(x) = l \neq 0$
$\dfrac{1}{f(x)}$	$\lim \dfrac{1}{f(x)} = 0^+$	$\lim \dfrac{1}{f(x)} = 0^-$	$\lim \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l}$

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0^-}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0^+}$
- $\lim\limits_{x\to1} 3x+2 = 5$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{3x+2} = \dfrac{1}{5}}$

$f(x)$	$\lim f(x) = 0^+$	$\lim f(x) = 0^-$
$\dfrac{1}{f(x)}$	$\lim \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$	$\lim \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$

Exemples :

- $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} 3x-6 = 0^-$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{1}{3x-6} = -\infty}$
- $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} 3x-6 = 0^+$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \dfrac{1}{3x-6} = +\infty}$

5.2 Limites d'une différence ou d'un quotient

Pour étudier la limite d'une différence ou d'un quotient, on utilise les règles suivantes pour revenir aux opérations précédentes :

$$\boxed{\begin{gathered} f(x) - g(x) = f(x) + [-g(x)] \\ \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)} \end{gathered}}$$

Exemple :

- $\lim\limits_{x\to 2} 2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}=2$ et $\lim\limits_{x\to 2} 3-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}=3$

  donc $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}}{3-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}} = 2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

  donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}}{3-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{2}{3}}$

5.3 Les formes indéterminées

Voilà les trois formes indéterminées à connaître :

- $\lim f(x)=+\infty$ et $\lim g(x)=-\infty$ alors $\lim f(x)+g(x)=?$ (Forme indéterminée)
- $\lim f(x)=+\infty$ et $\lim g(x)=0$ alors $\lim f(x)\times g(x)=?$ (Forme indéterminée)
- $\lim f(x)=-\infty$ et $\lim g(x)=0$ alors $\lim f(x)\times g(x)=?$ (Forme indéterminée)

Pour trouver la limite d'une forme indéterminée, on transforme l'espression pour que la limite soit déterminée.

Exemple 1 : On souhaite trouver $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+3}-\sqrt{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+3}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\sqrt{x}=-\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+3}-\sqrt{x}$ est une forme indéterminée.

or $\sqrt{x+3}-\sqrt{x}=\dfrac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\dfrac{(x+3)-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\dfrac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+3}+\sqrt{x}=+\infty$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+3}-\sqrt{x}=0^+}$$

Exemple 2 : On souhaite trouver $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+5x+5}{6x^2-6x-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2+5x+5=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{6x^2-6x-1}=0^+$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+5x+5}{6x^2-6x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2+5x+5)\times\dfrac{1}{6x^2-6x-1}$ est une forme indéterminée.

or $\dfrac{3x^2+5x+5}{6x^2-6x-1}=\dfrac{x^2\left(3+\dfrac{5}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(6-\dfrac{6}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{3+\dfrac{5}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{6-\dfrac{6}{x}-\dfrac{1}{x^2}}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} 3+\dfrac{5}{x}+\dfrac{5}{x^2}=3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 6-\dfrac{6}{x}-\dfrac{1}{x^2}=6$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+5x+5}{6x^2-6x-1}=3\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+5x+5}{6x^2-6x-1}=\frac{1}{2}}$$

6 Les asymptotes

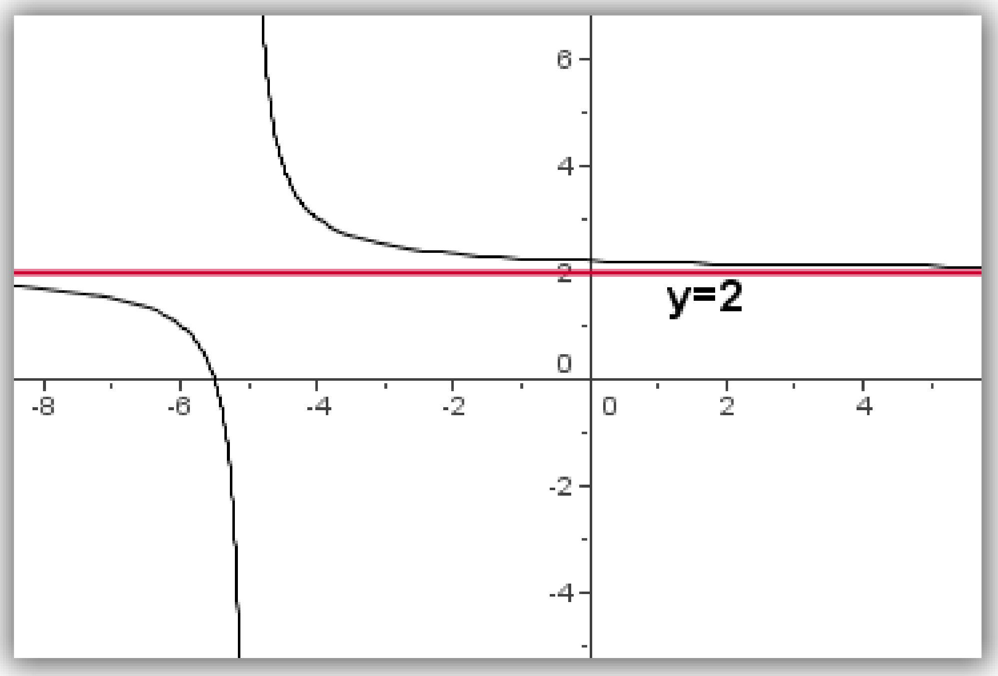
6.1 Asymptotes horizontales

Définition :

La droite d'équation $y = k$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$ ou en $-\infty$ si et seulement si :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = k$

Exemples :

- On note $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x+5}$
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+5} = 0^+$
  donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$
  La droite d'équation $y = 2$ est donc une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$
- On note $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x+5}$
  $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x+5} = 0^-$
  donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$
  La droite d'équation $y = 2$ est donc une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$



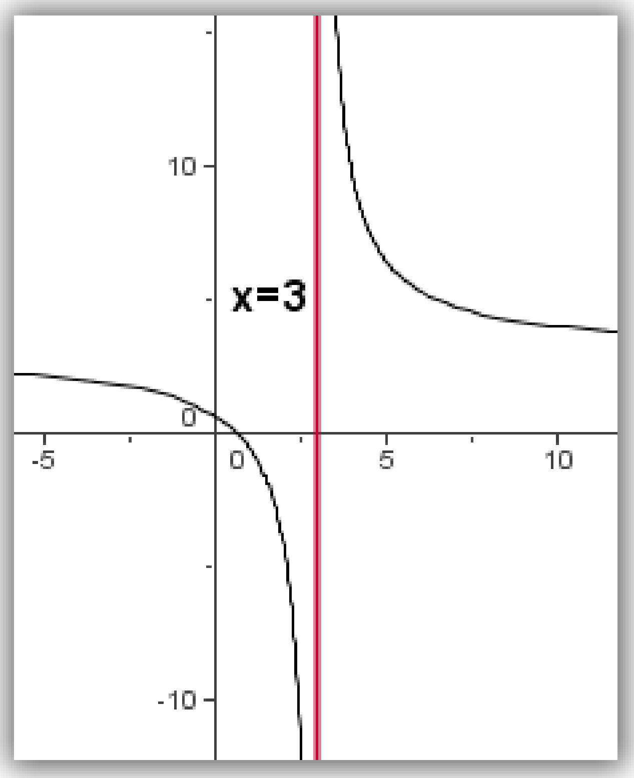
6.2 Asymptotes verticales

Définition :

La droite d'équation $x = k$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f si et seulement si :
$\lim_{x \to k} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to k} f(x) = -\infty$

Exemples :

- On note $f(x) = \dfrac{3x-2}{x-3}$
  $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$
  et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} 3x - 2 = 7$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = -\infty$
  La droite d'équation $x = 3$ est donc une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.
- On note $f(x) = \dfrac{3x-2}{x-3}$
  $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$
  et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} 3x - 2 = 7$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x) = +\infty$
  La droite d'équation $x = 3$ est donc une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.



6.3 Asymptotes obliques

Définition :

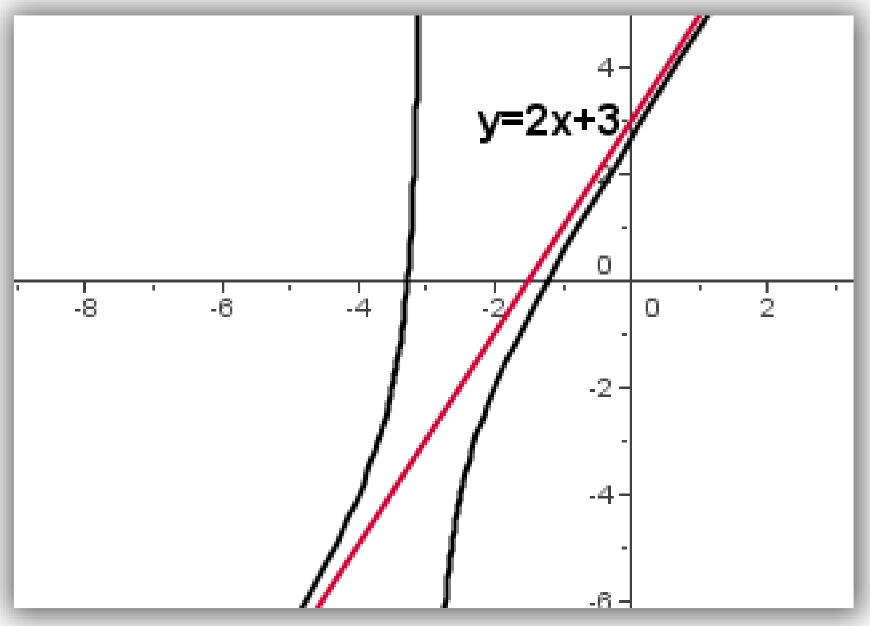
La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$ ou en $-\infty$ si et seulement si :
$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

• **Exercice** On note $f(x) = \dfrac{2x^2 + 9x + 8}{x + 3}$

1. Démontrer que $f(x) = 2x + 3 - \dfrac{1}{x + 3}$
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x + 3)]$
3. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (2x + 3)]$
4. En déduire que la droite Δ d'équation $y = 2x + 3$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.

➠ Correction de l'exercice :

1. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
   on a $2x + 3 - \dfrac{1}{x + 3} = \dfrac{(2x + 3)(x + 3) - 1}{x + 3} = \dfrac{2x^2 + 6x + 3x + 9 - 1}{x + 3} = \dfrac{2x^2 + 9x + 8}{x + 3}$
2. D'après la première question $f(x) - (2x + 3) = \dfrac{1}{x + 3}$
   donc
   $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x + 3)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x + 3} = 0^+$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (2x + 3)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x + 3} = 0^-$
4. D'après le 2. et 3. la droite Δ d'équation $y = 2x + 3$ est bien asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.



7 Exemples