Chapitre 1

Généralités sur les fonctions.

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

1 Quelques rappels de seconde

Fiche d'activités ✎ ActivitesPrepaRappelsReference.pdf ✐

Une fonction f définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ associe à chaque nombre $x \in I$ un nombre réel et un seul, que l'on note $f(x)$. $f(x)$ s'appelle **l'image de x par la fonction** f. x s'appelle **l'antécédent** de $f(x)$.

Ensemble de définition d'une fonction :

L'ensemble de définition d'une fonction f (noté D_f) est l'ensemble des nombres réels tels que $f(x)$ existe.
$D_f = \{x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x)$ existe $\}$

Courbe représentative d'une fonction :
Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. f est une fonction définie sur I. On appelle **courbe représentative de** f **sur** I, l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x \in I$ et $y = f(x)$.
On dit alors que $y = f(x)$ est **l'équation de la courbe** f dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Voir les activités.
Parité d'une fonction :
Soit f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$.

Si D_f est symétrique par rapport à 0, alors
➠ Si de plus $\forall x \in \mathbb{D}_f$ on a $f(-x) = f(x)$ alors la fonction f est paire
et sa courbe représentative C_f est symétrique par rapport à $(O, \overrightarrow{j})$
➠ Si de plus $\forall x \in \mathbb{D}_f$ on a $f(-x) = -f(x)$ alors la fonction f est impaire
et sa courbe représentative C_f est symétrique par rapport à $O(0, 0)$ l'origine du repère.

Périodicité d'une fonction :
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}^*$.

Si $\forall x \in D_f$ on a $f(x + T) = f(x)$ alors on dit que f est périodique
de période T ou qu'elle est T-périodique.
Dans ce cas sa courbe représentative peut être tracé en recopiant de façon répétitive, une portion particulière de longueur une période, à intervalles réguliers

Variations d'une fonction :
Soit f une fonction définie sur I.

Si $\forall a \in I$ et $\forall b \in I$ tels que $a \leq b$ on a $f(a) \leq f(b)$ alors f est croissante sur I
Si $\forall a \in I$ et $\forall b \in I$ tels que $a < b$ on a $f(a) < f(b)$ alors f est strictement croissante sur I

Si $\forall a \in I$ et $\forall b \in I$ tels que $a \leq b$ on a $f(a) \geq f(b)$ alors f est décroissante sur I
Si $\forall a \in I$ et $\forall b \in I$ tels que $a > b$ on a $f(a) > f(b)$ alors f est strictement décroissante sur I

Extremums d'une fonction :

Soit f une fonction définie sur I.

Si $\forall x \in I$ il existe a$\in I$ tel que $f(x) \leq f(a)$ alors $f(a)$ est un maximum de f sur I
Si $\forall x \in I$ il existe a$\in I$ tel que $f(x) \geq f(a)$ alors $f(a)$ est un minimum de f sur I

2 Opérations algébriques sur les fonctions

Fiche d'activités ✎ ActivitesPrepaOperVariaFonctions.pdf ✐ Act1

2.1 Définitions

On note f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I et λ un nombre réel.
Définition de $f+g$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$
La fonction $f+g$ est la fonction définie sur D_{f+g} par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Exemple :
On note $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$
On note $g : x \mapsto x - 3$ définie sur $\mathbb{R}$
Alors $f + g : x \mapsto x^2 + x - 3$ est définie sur $\mathbb{R}$

Définition de λf

$$D_{\lambda f} = D_f$$
La fonction λf est la fonction définie sur $D_{\lambda f}$ par $(\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$

Exemples
$3f : x \mapsto 3x - 9$ est définie sur $\mathbb{R}$

Définition de fg

$$D_{fg} = D_f \cap D_g$$
La fonction fg est la fonction définie sur D_{fg} par $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$

Exemple :
$fg : x \mapsto x^3 - 3x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$

Définition de $\dfrac{f}{g}$

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g \backslash \{x \in R \text{ tq } g(x) = 0\}$$

La fonction $\dfrac{f}{g}$ est la fonction définie sur $D_{f/g}$ par $\dfrac{f}{g} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Exemple :
$\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{x^2}{x-3}$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$

2.2 Vocabulaire

Fonctions polynômes :

La somme de fonctions de la forme αx^n avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ s'appelle **une fonction polynôme**.

Fonctions rationnelles :

La quotient de deux fonctions polynômes s'appelle **une fonction rationnelle**.

Exemples :
1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-1}$ est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$.

Exercice 1:
On note $f : \mapsto \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$

1. Trouver D_f
2. Écrire f sous forme d'une fonction rationnelle.

Exercice 2 :
Trouver a et b (deux réels) tels que : $\dfrac{x+2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$

Fonctions homographiques :

La fonction rationnelle $f :\mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ou a, b, c, d sont des réels avec $c \neq 0$
est appelée **fonction homographique**

Exemples :
1. $f :\mapsto 3 - \dfrac{5}{2x+1}$ est-elle homographique ?
2. trouver les réels a et b tels que : $f(x) = \dfrac{6x+7}{2x+3} = a + \dfrac{b}{2x+3}$

2.3 Variations

2.3.1 Variations de $\lambda + f$

On note f une fonction définie sur un intervalle I et λ un réel quelconque.
Question 1 : Quel est le sens de variation de la fonction $f + \lambda$?

Théorème 1 :

Les fonctions f et $f + \lambda$ ont les mêmes variations sur I.

Démonstration :
Soient a et b deux réels appartenant à I tels que $a < b$
Alors $(f\lambda)(a) - (f+\lambda)(b) = f(a) + \lambda - f(b) - \lambda = f(a) - f(b)$
➠ Si $f \nearrow$ alors $(f\lambda)(a) - (f+\lambda)(b) < 0$ donc $f + \lambda$ est croissante.
➠ Si $f \searrow$ alors $(f\lambda)(a) - (f+\lambda)(b) > 0$ donc $f + \lambda$ est décroissante.

2.3.2 Variations de λf

Question 2 : Quel est le sens de variation de la fonction λf ?
Théorème 2 :

Si $\lambda > 0$ alors les fonctions f et λf ont les mêmes variations sur I.
Si $\lambda < 0$ alors les fonctions f et λf ont des variations contraires sur I.

Démonstration :
Soient a et b deux réels appartenant à I tels que $a < b$
Alors $(\lambda f)(a) - (\lambda f)(b) = \lambda f(a) - \lambda f(b) = \lambda(f(a) - f(b))$
➠ Si $\lambda > 0$
Si de plus $f \nearrow$ alors $(\lambda f)(a) - (\lambda f)(b) < 0$ donc λf est croisante.
Si de plus $f \searrow$ alors $(\lambda f)(a) - (\lambda f)(b) > 0$ donc λf est décroisante.
➠ Si $\lambda > 0$
Si de plus $f \nearrow$ alors $(\lambda f)(a) - (\lambda f)(b) > 0$ donc λf est décroisante.
Si de plus $f \searrow$ alors $(\lambda f)(a) - (\lambda f)(b) < 0$ donc λf est croisante.
Exemples :
Étudier les variations de $f : x \mapsto x^2 - 3$, $g : x \mapsto \dfrac{3}{x}$ et $h :\mapsto 5 - 2\sqrt{x}$

2.3.3 Variations de $g : x \mapsto f(x + \lambda)$

Question 3 : Quel est le sens de variation de la fonction $g : x \mapsto f(x + \lambda)$?
Théorème 3 :

On note g la fonction qui a x associe $f(x + \lambda)$

Si f est strictement croissante sur $[a; b]$ alors g est strictement croissante sur $[a - \lambda; b - \lambda]$
Si f est strictement décroissante sur $[a; b]$ alors g est strictement décroissante sur $[a - \lambda; b - \lambda]$

(On peut remplacer $[a; b]$ par $]a; b[$ ou $]a; b]$ ou $[a; b[$)

Démonstration :
Première partie :
On note $u : x \mapsto x + \lambda$
Soient deux nombres a et b de $[a - \lambda; b - \lambda]$ tels que $a < b$.
La fonction u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $u(a) < u(b) \Leftrightarrow a + \lambda < b + \lambda$.
De plus si $a \in [a - \lambda; b - \lambda]$ alors $a + \lambda \in [a; b]$ et si $b \in [a - \lambda; b - \lambda]$ alors $b + \lambda \in [a; b]$.
Or sur $[a; b]$ la fonction f est strictement croissante, donc $f(a + \lambda) < f(b + \lambda)$
donc $g(a) < g(b)$ ce qui implique que g est strictement croissante sur $[a - \lambda; b - \lambda]$.
Première partie :
A faire pour vous amuser ...
Exemple : Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto (x - 7)^2$

3 Courbes et transformations

Fiche d'activités ✎ ActivitesPrepaOperVariaFonctions.pdf ✐ Act2

3.1 Courbe représentative de $f + \lambda$

On note f une fonction définie sur I.
Théorème 4 :

On obtient $\mathcal{C}_{f+\lambda}$ en faisant une translation de $\mathcal{C}_f$ de vecteur $\lambda\overrightarrow{j}$

Démonstration :
Soient deux points $M(x;y)$ et $M'(x;y)$
➠ $M' = t_{\lambda\overrightarrow{j}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = -\lambda\overrightarrow{j} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x'-x=0 \\ y'-y=\lambda \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x'=x \\ y'=y+\lambda \end{array}\right.$
➠ $M(x;y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y - \lambda = f(x) - \lambda \Leftrightarrow y = g(x) + \lambda$ ce qui signifie que le point de coordonnées $(x; y + \lambda)$ qui est le translaté de M par la translation de vecteur $\lambda\overrightarrow{j}$ est un point de $\mathcal{C}_g$.

3.2 Courbe représentative de g avec $g(x) = f(x + \lambda)$

On note f une fonction définie sur I.
Théorème 5 :

On obtient $\mathcal{C}_g$ sachant que $\forall x \in D_g, g(x) = f(x + \lambda)$ en faisant une translation de $\mathcal{C}_f$ de vecteur $-\lambda\overrightarrow{i}$

Démonstration :
Soient deux points $M(x;y)$ et $M'(x;y)$
➠ $M' = t_{-\lambda\overrightarrow{i}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = -\lambda\overrightarrow{i} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x'-x=-\lambda \\ y'-y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x'=x-\lambda \\ y'=y \end{array}\right.$
➠ $M(x;y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = f(x - \lambda + \lambda) = g(x - \lambda)$ ce qui signifie que le point de coordonnées $(x - \lambda; y)$ qui est le translaté de M par la translation de vecteur $-\lambda\overrightarrow{i}$ est un point de $\mathcal{C}_g$.

3.3 Courbe représentative de g avec $g(x) = f(x + \lambda) + \alpha$

On note f une fonction définie sur I.
Théorème 5 bis :

On obtient $\mathcal{C}_g$ sachant que $\forall x \in D_g, g(x) = f(x + \lambda) + \alpha$ en faisant une translation de $\mathcal{C}_f$ de vecteur $-\lambda\overrightarrow{i} + \alpha\overrightarrow{j}$

Remarques :
Si f est définie sur l'intervalle $[a;b]$
➠ $x \mapsto f(x) + \lambda$ est-elle définie aussi sur $[a;b]$?
➠ $x \mapsto f(x + \lambda)$ est-elle définie aussi sur $[a;b]$ ou sur $[a - \lambda; b - \lambda]$?

Exemples :
➠ On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ telle que $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
Alors $f(x) = u(x + 1)$ si u est la fonction inverse

donc $\mathcal{C}_f$ est l'image de l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ par la translation de vecteur $-\overrightarrow{i}$. De plus u est impaire sur $\mathbb{R}^*$ donc $O(0;0)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_u$ et $\Omega(-1;0)$ est l'image de 0 par la translation
donc $\mathcal{C}_f$ st une hyperbole de centre de symétrie $\Omega(-1;0)$
➟ On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = (x-2)^2 + 3$.
Alors $f(x) = u(x-2) + 3$ si u est la fonction carré.
$\mathcal{C}_u$ est la parabole d'équation $y = x^2$ et de sommet $O(0;0)$
La courbe d'équation $y = u(x-2) + 3$ est l'image de $\mathcal{C}_u$ par la translation de vecteur $+2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$.
C'est donc une parabole de sommet $\Delta(2;3)$
$\mathcal{C}_u$ a pour axe de symétrie $x = 0$ car u est paire sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{C}_f$ a pour axe de symétrie $x = 2$.

4 Composition de deux fonctions

4.1 Définitions

Fiche d'activités ✎ ActivitesPrepaComposition.pdf ✐

Définition de $f \circ g$

Soit f une fonction définie sur D_f et g une fonction définie sur D_g telles que $\forall x \in I$, $f(x) \in D_g$.
On appelle **composée de f suivie de g**, la fonction notée $g \circ f$ (g rond f) définie sur $D_{g\circ f}$ par $(g \circ f)(x) = g\,[f(x)]$

Remarque importante :

Pour que $(g \circ f)(x) = g\,[f(x)]$ existe il faut que $x \in D_f$ et que $f(x) \in D_g$.
Pour que $(f \circ g)(x) = f\,[g(x)]$ existe il faut que $x \in D_g$ et que $f(x) \in D_f$.

Exemples :
1. On note $f : x \to x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g : x \mapsto x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
➟ $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $(g \circ f)(x) = g\,[f(x)] = g(x^2) = x^2 + 1$
➟ $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $(f \circ g)(x) = f\,[g(x)] = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
2. On note $f : x \to \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et $g : x \mapsto x^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
➟ $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $(g \circ f)(x) = g\,[f(x)] = g\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^2} + 1$
➟ $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$ (car $x^2 + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$) et $(f \circ g)(x) = f\,[g(x)] = f(x^2+1) = \dfrac{1}{x^2+1}$
3. On note $f : x \to \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et $g : x \mapsto x^2 - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
➟ $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $(g \circ f)(x) = g\,[f(x)] = g\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^2} - 1$
➟ $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ (car $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$)
et $(f \circ g)(x) = f\,[g(x)] = f(x^2-1) = \dfrac{1}{x^2-1}$

4.2 Variations

Fiche d'activités ✎ ActivitesPrepaComposition.pdf ✐

Théorème 6
On note $f(I)$ l'ensemble des valeurs $f(x)$ où $x \in I$.

➠ Si f est croissante sur I, g croissante sur $f(I)$ et $f(I) \subset D_g$ alors $g \circ f$ est croissante sur I
➠ Si f est décroissante sur I, g décroissante sur $f(I)$ et $f(I) \subset D_g$ alors $g \circ f$ est croissante sur I
➠ Si f est croissante sur I, g décroissante sur $f(I)$ et $f(I) \subset D_g$ alors $g \circ f$ est croissante sur I
➠ Si f est décroissante sur I, g croissante sur $f(I)$ et $f(I) \subset D_g$ alors $g \circ f$ est croissante sur I

On peut évidemment remplacer **croissante** par **strictement croissante** et **décroissante** par **strictement décroissante**.

Démonstration :
➠ Si f est croissante sur I, g décroissante sur $f(I)$ et $f(I) \subset D_g$ alors $g \circ f$ est croissante sur I
Soient a et b deux nombres de I tels que $a \leq b$
Comme f est croissante sur I alors $f(a) \leq f(b)$
Comme g est croissante sur $f(I)$ et que $f(a) \in f(I)$ et $f(b) \in f(I)$ alors g$[f(a)] \geq g\,[f(b)]$
donc $(g \circ f)(a) \geq (g \circ f)(b)$
donc $g \circ f$ est croissante sur I.
Les autres démonstrations sont similaires. Vous pouvez vous amuser en les faisant ...

Exemples :

1. Étudier le sens de variation de la fonction h définie par : $h(x) = (x-1)^2$.
   On décompose h de la façon suivante : h=g$\circ f$ où $f(x) = x - 1$ et $g(x) = x^2$.
   La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; 1]$ et la fonction g est strictement croissante sur $f(]-\infty;1]) =]0; +\infty[$ donc h est strictement croissante sur $]-\infty; 1]$.
   La fonction f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et la fonction g est strictement décroissante sur $f([1;+\infty[) =]-\infty; 0[$ donc h est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

2. Étudier le sens de variation de la fonctio h définie par : $h(x) = \sqrt{1+x^2}$.
   On décompose h de la façon suivante : h=g$\circ f$ où $f(x) = 1 + x^2$ et $g(x) = x\sqrt{x}$.
   La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et la fonction g est strictement croissante sur $f(\mathbb{R}^-) = [1; +\infty[$ donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
   La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction g est strictement croissante sur $f(\mathbb{R}^+) = [1; +\infty[$ donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

3. Étudier le sens de variation de la fonctio h définie par : $h(x) = \sqrt{1-x}$.
   L'ensemble de définition de h est $]-\infty; 1]$, on étudie donc les variations sur cet ensemble.
   On décompose h de la façon suivante : h=g$\circ f$ où $f(x) = 1 - x$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
   La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1]$ et la fonction g est strictement croissante sur $f(]-\infty;1]) = \mathbb{R}^+$ donc h est strictement décroissante sur $]-\infty; 1]$.

J'ajouterai un peu plus tard des schéma sur ce cours.

✣ ✣ Fin du cours ✣ ✣