Les fonctions dérivées

(En première S)

Dernière mise à jour : Vendredi 03 Janvier 2007

Vincent OBATON, Enseignant au lycée Stendhal de Grenoble (Année 2006-2007)

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

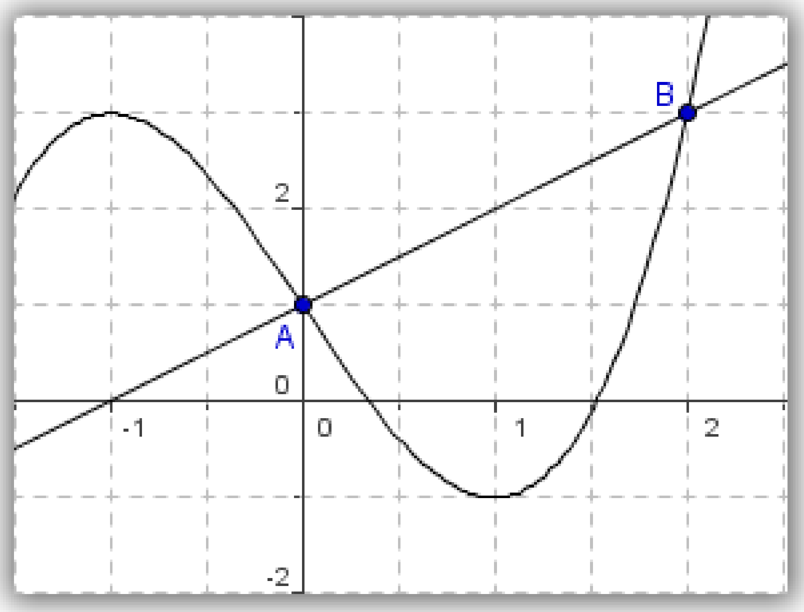
Stendhal

Table des matières

1 Courbes et droites

1.1 Equation de droite

Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
On note A et B deux points, différents, de la courbe $\mathcal{C}_f$



Calculons l'équation de la droite (AB).
L'équation de la droite (AB) est de la forme $y = mx + p$ avec m le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.
➠ Calculons m :
On sait que $m = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dfrac{f(x_A) - f(x_B)}{x_A - x_B}$
➠ Calculons p :
On sait que $A \in (AB)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation $y = mx + p$
donc $y_A = \dfrac{f(x_A) - f(x_B)}{x_A - x_B} x_A + p$ donc $p = y_A - \dfrac{f(x_A) - f(x_B)}{x_A - x_B} x_A$
Conclusion :
L'équation de la droite (AB) est :

$$y = \left[\frac{f(x_A) - f(x_B)}{x_A - x_B}\right] x + \left[y_A - \frac{f(x_A) - f(x_B)}{x_A - x_B} x_A\right]$$

Cette formule n'est pas à apprendre par coeur.

1.2 Exemples

1. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-3)^2 + 1$
   On note A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2 et B le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse -1
   Calculer l'équation de la droite (AB).
2. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{-3x+1}{x^2}$
   On note A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2 et B le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse -1
   Calculer l'équation de la droite (AB).

1.3 Taux de variation

On nomme f une fonction définie sur I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
On nomme A et B deux points de $\mathcal{C}_f$
Vocabulaire :

> On note **taux de variation de f entre x_A et x_B** le rapport :
> $$\tau_{[A,B]}(f) = \frac{f(x_A) - f(x_B)}{x_A - x_B}$$

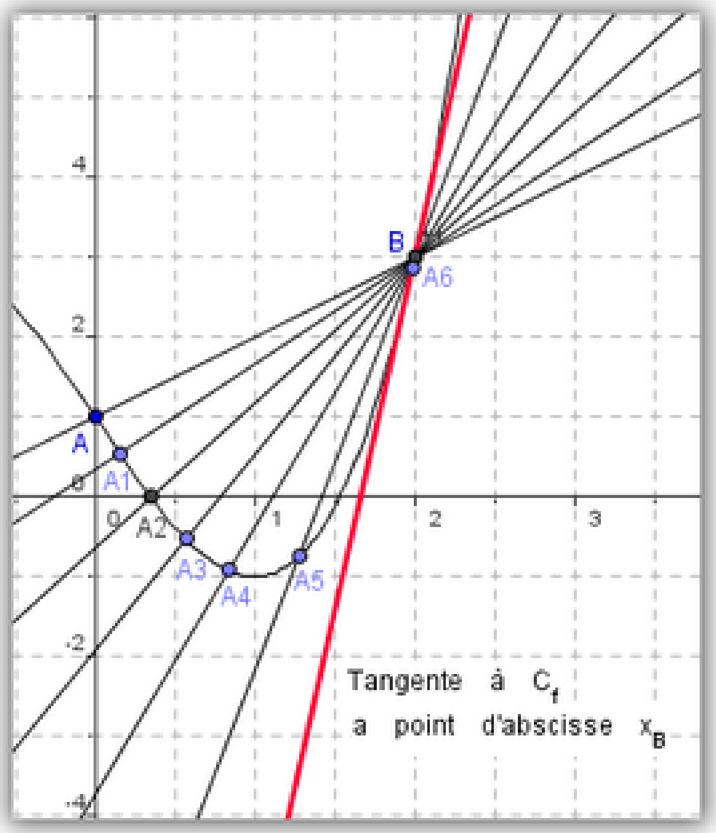
Remarque : Le taux de variation de f entre x_A et x_B est aussi le coefficient directeur de la droite (AB)

1.3.1 Exemples

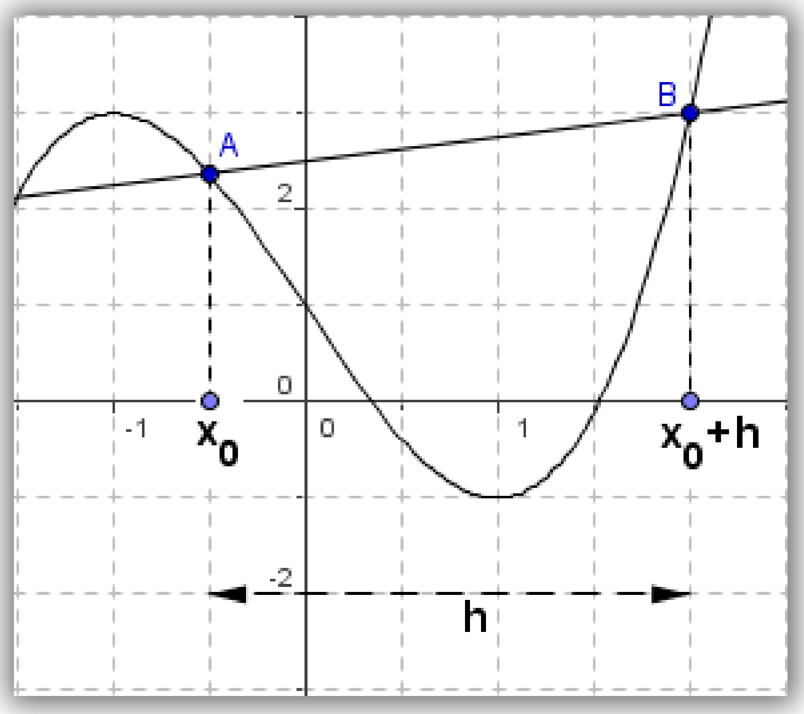
1. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 6x + 7$
   Calculer le taux de variation de f entre 3 et -2.
2. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x+3}{(x-1)^2}$
   Calculer le taux de vaiation de f entre -3 et -1.

2 Le nombre dérivé

On cherche maintenant à savoir ce qui se passe si on rapproche le point A vers le B jusqu'à ce qu'ils se superposent.



On remarque que lorsqu'on rapproche A de B la droite (AB) se rapproche de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_B.
Lorsque A est très très proche de B alors la droite (AB) est confondue avec la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_B.
Comment traduire ça de façon mathématiques ?



On souhaite traduire que :
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_B est le taux de variation de f entre x_A et x_B lorsque A se rapproche de B.
On note $x_A = x_b + h$ l'abscisse du point A.
Pour traduire que le point A est tout proche de B on va donc dire que h tend vers 0. (car si h tend vers 0 alors x_A tend vers x_B). Il faut donc calculer le taux de variation de f entre $x_B + h$ et x_B lorsque h tend vers 0.
Or $\tau_{[x_B+h,x_B]}(f) = \dfrac{f(x_B+h) - f(x_B)}{x_B + h - x_B} = \dfrac{f(x_B+h) - f(x_B)}{h}$
On traduit donc de la façon suivante :
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_B est :

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_B+h) - f(x_B)}{h}$$

On nomme ce coefficient directeur **le nombre dérivé de f en x_B**

2.1 Définition

Définition du nombre dérivé de f en x_B :

Si $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x_B+h) - f(x_B)}{h}$ existe et est un nombre réel alors

on nomme **nombre dérivé de f en x_B** et on note $f'(x_B)$ le nombre :

$$f'(x_B) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_B+h) - f(x_B)}{h}$$

2.2 Exemples

On note f, g et h les trois fonctions suivantes :
$f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$
$g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$
$h : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$

1. Calculer $f'(2)$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-(2)^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h+h^2}{h}$$
donc $\lim\limits_{h\to 0} 4+h = 4$ donc $\boxed{f'(2)=4}$
2. Calculer $g'(-1)$
$$\lim_{h\to 0} \frac{g(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{-1+h}+1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{-1+h}+\frac{-1+h}{-1+h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{-1+h}}{h}$$
donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{-1+h} \times \dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{-1+h} = -1$ donc $\boxed{g'(-1)=-1}$
3. Calculer $h'(3)$
$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{h(3+\alpha)-h(3)}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\sqrt{3+\alpha}-\sqrt{3}}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{(\sqrt{3+\alpha}-\sqrt{3})(\sqrt{3+\alpha}+\sqrt{3})}{\alpha(\sqrt{3+\alpha}+\sqrt{3})}$$
donc $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{(3+\alpha)-(3)}{\alpha(\sqrt{3+\alpha}+\sqrt{3})} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\alpha}{\alpha(\sqrt{3+\alpha}+\sqrt{3})} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{3+\alpha}+\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$
donc $\boxed{h'(3) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}}$

2.3 Tangente à une courbe en un point

2.3.1 Equation de la tangente à une courbe en un point

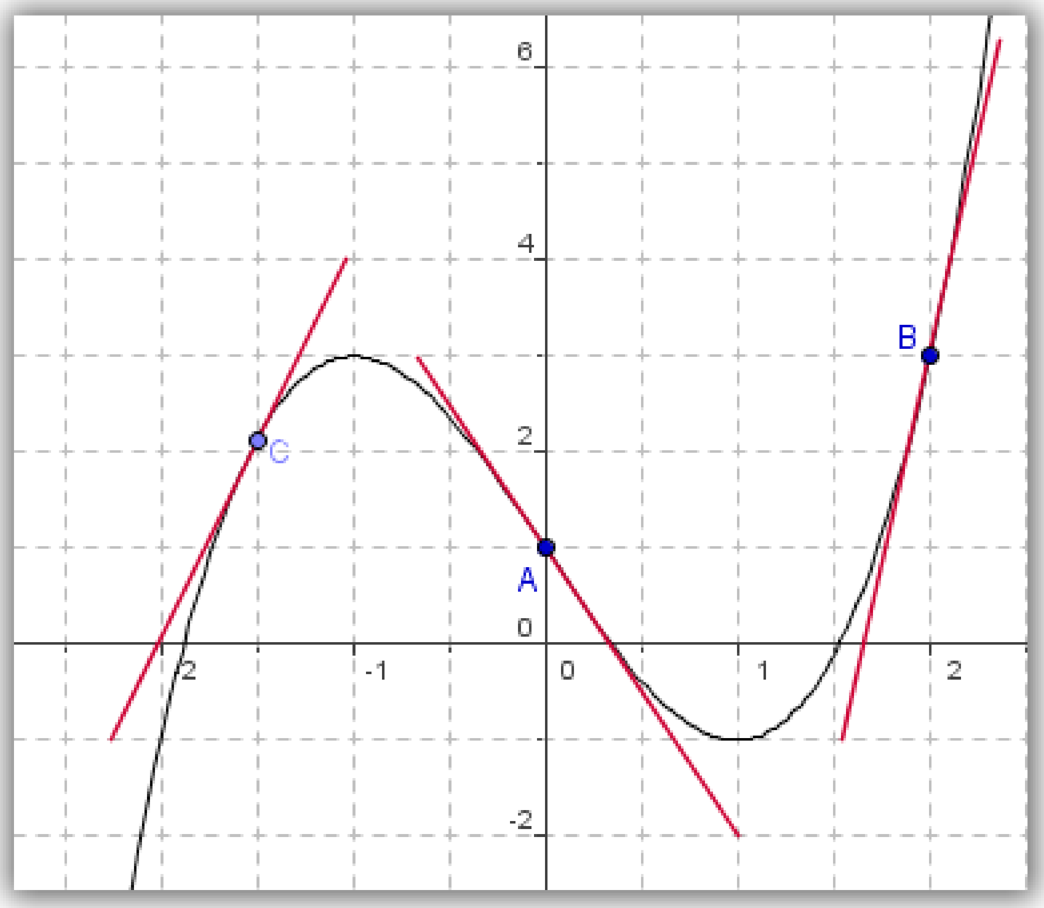
Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On note A un point de la courbe $\mathcal{C}_f$.
On cherche à connaître l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_A.
On sait que l'équation est de la forme $y = mx + p$ avec :
$m = f'(x_A)$ et $y = f(x_A)$
On trouve donc que $p = f(x_A) - f'(x_A)x_A$
donc l'équation est $y = f'(x_A)x + f(x_A) - f'(x_A)x_A = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$

> L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_A est :
> $y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$

2.3.2 Exemples

➠ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
On souhaite calculer l'équation de (D) la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 = 2$.
D'après les exemples précédents : $f'(2) = 4$ et $f(2) = 2^2 = 4$ donc l'équation de (D) est
$y = 4(x-2) + 4 = 4x - 8 + 4 = 4x - 4$
➠ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
On souhaite calculer l'équation de (D) la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 = 3$.
D'après les exemples précédents : $f'(3) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ et $f(3) = \sqrt{3}$ donc l'équation de (D) est
$$y = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-3) + \sqrt{3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2.4 Coefficient directeur des tangentes et variations de la fonction



On remarque qu'il y a un lien entre le signe du coefficient directeur des tangentes et les variations de la fonction f.
Sur la figure ci-dessus, on remarque que :
➠ Si la fonction est décroissante sur I alors le coeffcient directeur des tangentes aux points d'abscisse dans I est négatif.
➠ Si la fonction est croissante sur I alors le coeffcient directeur des tangentes aux points d'abscisse dans I est positif.

Théorème :

Si f est décroissante sur I et dérivable sur I alors $\forall x_0 \in I$ on a $f'(x_0) \leq 0$

Si f est croissante sur I et dérivable sur I alors $\forall x_0 \in I$ on a $f'(x_0) \geq 0$

Démonstration :
On note f une fonction, h un nombre positif et x_0 un nombre tel que $x_0 + h \in I$ et $x_0 \in I$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

➠ f est décroissante sur I et $x_0 + h \geq x_0$ donc $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$
donc $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$ donc $f'(x_0) \leq 0$
➠ f est croissante sur I et $x_0 + h \geq x_0$ donc $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$
donc $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$ donc $f'(x_0) \geq 0$

On voit donc que le signe du nombre dérivé est très important pour étudier les variations d'une fonction.
Mais nous n'allons pas nous amuser à calculer le nombre dérivée en tous les points de l'ensemble de définition car nous allons y passer trop temps.
Nous allons donc construire des fonctions qui à x associe le nombre dérivé de f en x.
On nommera cette fonction **la fonction dérivée de** f.

3 Les fonctions dérivées

Soit f une fonction définie sur I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

3.1 Définition

> $\forall x \in I$ tels que $f'(x)$ existe, on nomme **fonction dérivée de f**
>
> la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$

Attention l'ensemble de définition de f n'est pas toujours le même que l'ensemble de dérivabilité (ensemble de définition de f').
Vocabulaire
Lorsque $f'(x)$ existe on dit que f est dérivable en x et si $f'(x)$ existe $\forall x \in I$ on dit que f est dérivable sur I.

3.2 Fonctions usuelles

Étudions la fonction dérivée des fonctions de références.

3.2.1 La fonction carrée

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$
Calculons le nombre dérivé de f en $x_0\mathbb{R}$:
$\tau_{[x_0+h;x_0]}(f) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \dfrac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \dfrac{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2}{h}$
donc $\tau_{[x_0+h;x_0]}(f) = \dfrac{2hx_0 + h^2}{h} = 2x_0 + h$
donc $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} 2x_0 + h = 2x_0$

> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$
>
> Alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x$

Maintenant pour calculer le nombre dérivé de la fonction carré en $x = 3$, il suffit de faire :
$f'(3) = 2 \times 3 = 6$

3.2.2 La fonction inverse

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$
Calculons le nombre dérivé de f en $x_0\mathbb{R}^*$:

$$\tau_{[x_0+h;x_0]}(f) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\dfrac{1}{x_0+h} - \dfrac{1}{x_0}}{h} = \frac{\dfrac{x_0 - x_0 - h}{x_0^2 + hx_0}}{h}$$

donc $\tau_{[x_0+h;x_0]}(f) = \dfrac{-h}{x_0^2+hx_0} \times \dfrac{1}{h} = \dfrac{-1}{x_0^2+hx_0}$
donc $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{x_0^2+hx_0} = -\dfrac{1}{x_0^2}$

> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$
>
> Alors $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Maintenant pour calculer le nombre dérivé de la fonction inverse en $x = 3$, il suffit de faire :
$f'(3) = 2 - \dfrac{1}{3^2} = -\dfrac{1}{9}$

3.2.3 La fonction racine carrée

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$
Calculons le nombre dérivé de f en $x_0\mathbb{R}^+$:
$\tau_{[x_0+h;x_0]}(f) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \dfrac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} = \dfrac{(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}$
donc $\tau_{[x_0+h;x_0]}(f) = \dfrac{x_0+h-x_0}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} = \dfrac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$
donc $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$
Attention, ici $f'(x)$ existe lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pas sur $\mathbb{R}^+$

> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$
>
> Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Maintenant pour calculer le nombre dérivé de la fonction racine carrée en $x = 3$, il suffit de faire :
$f'(3) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

3.2.4 Les fonctions affines

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$
Calculons le nombre dérivé de f en $x_0\mathbb{R}$:
$\tau_{[x_0+h;x_0]}(f) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \dfrac{a(x_0+h)+b-ax_0-b}{h} = \dfrac{ah}{h} = a$
donc $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} a = a$

> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$
>
> Alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = a$

Maintenant pour calculer le nombre dérivé de la fonction affine $f(x) = 3x - 5$ en $x = -1$, il suffit de faire : $f'(-1) = 3$

3.2.5 Résumé

On ne vas pas faire les calculs pour toutes les fonctions mais il va falloir retenir les formules ci-dessous :

Fonctions	Fonctions dérivées
$f(x) = k$ définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$ définie sur $\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$ définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = a$ définie sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$ définie sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$

Dans le cas général des fonctions de référence :
On note n un entier naturel : $n \in \mathbb{N}$

Fonctions	Fonctions dérivées
$f(x) = x^n$ définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$ définie sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ définie sur $\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$
$f(x) = \cos(x)$ définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$ définie sur $\mathbb{R}$

Exemples :

1. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5$
   alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 5x^4$
2. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$
   alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$

3.3 Somme, Produit, inverse et quotient

Essayons maintenant de trouver des formules pour dériver des sommes de fonctions, des différences de fonctions, des produits de fonctions et des quotients de fonctions.
Nous n'allons pas démontrer toutes ces formules sauf si vous le demandez en classe. (Je ferais un doc avec les démonstrations)
Voilà quelques formules à connaître et à savoir appliquer :
On note u et v deux fonctions définies sur le même intervalle I.

Fonctions	Fonctions dérivées
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = u(x) - v(x)$	$f'(x) = u'(x) - v'(x)$
$f(x) = u(x) \times v(x)$	$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
$f(x) = g(ax+b)$	$f'(x) = ag'(ax+b)$

3.3.1 Exemples

Trouver la dérivée des fonctions ci-dessous :

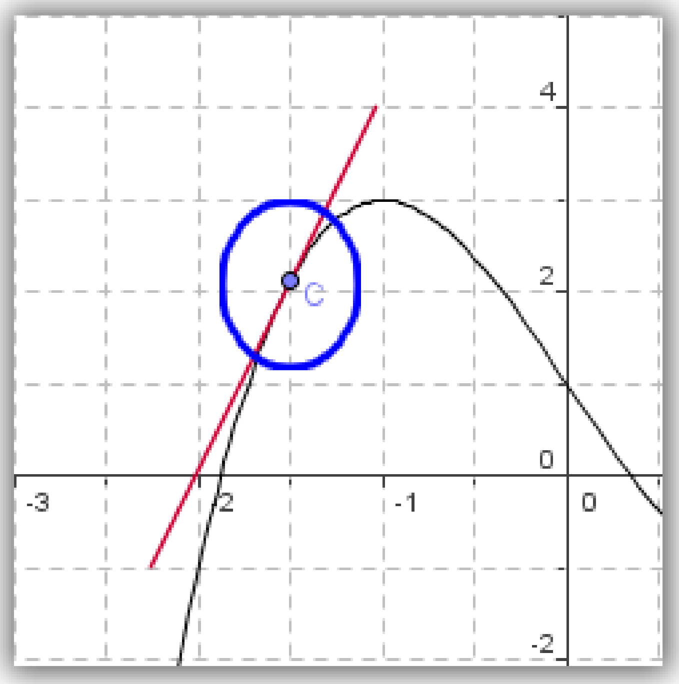
$$f(x) = 4x^5 - 3x^2 + 6x - 7 \qquad g(x) = \frac{1}{2x-3} \qquad h(x) = \frac{3x-5}{2x+3} \qquad w(x) = \sqrt{3x+4}$$

1. Pour la première on utilise les formules de la somme et de la différence :
   f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$:
   $f'(x) = 4 \times 5x^4 - 3 \times 2x + 6 = 20x^4 - 6x + 6$
2. Pour g on utilise la formule de la dérivée de $\dfrac{u(x)}{v(x)}$:
   g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\dfrac{3}{2}\}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\dfrac{3}{2}\}$:
   On a $g(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 1$ donc $u'(x) = 0$ et $v(x) = 2x - 3$ alors $v'(x) = 2$ donc :
   $g'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = -\dfrac{2}{(2x-3)^2}$
3. Pour h on utilise la formule de la dérivée de $\dfrac{u(x)}{v(x)}$.
   h est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{3}{2}\}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{3}{2}\}$:
   $h'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
   avec $u(x) = 3x - 5$ donc $u'(x) = 3$ et $v(x) = 2x + 3$ donc $v'(x) = 2$
   donc $h'(x) = \dfrac{3(2x+3) - 2(3x-5)}{(2x+3)^2} = \dfrac{x-1}{(2x+3)^2}$

4. Pour la dernière on utilise la formule de la dérivée de $\sqrt{ax+b}$:
   w est définie sur $[-\frac{4}{3};+\infty[$ et dérivable sur $]-\frac{4}{3};+\infty[$
   $w'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{u(x)}}$ avec $u(x) = 3x+4$ et $a = 3$
   donc $w'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}}$

4 Approximation affine d'une fonction en un point

Un approximation affine est une approximation d'une fonction par une application affine.
Au alentours d'un point, on cherche une application affine $mx+p$ qui est environ égal à $f(x)$.



On sait déjà qu'au alentour d'un point, la courbe et la tangente à la courbe en ce point, sont très proche.
Définition : On note f une fonction dérivable sur I et $a \in I$

> Pour tout $a \in I$, on dit que la fonction $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$
>
> est une approximation affine de f en a.
>
> Et on écrit, pour tout x très proche de a :
>
> $$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$
>
> ou
> Pour h petit, on a $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$

Exemple : Soit f la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout x très proche de 3 on a :
$f(x) \approx 6(x-3)+9$ donc $f(x) \approx 6x-9$
Par exemple : f(3,001)$\approx 6 \times 3,001 - 9 = 9,006$
Vérification : $f(3,001) = 3,001^2 = 9,006001$

5 Exemples et applications

5.1 Dérivabilité de la fonction racine carré

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ ou $[0; +\infty[$
Est-elle dérivable sur l'ensemble de définition ?
Si on regarde la courbe représentative de la fonction f on voit qu'en 0 elle admet une tangente verticale. Elle ne semble donc pas dérivable en 0.
Étudions la dérivabilité en $x = 0$.
Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$:
$\tau_{[0+h;0]}(f) = \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$
Or $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ n'admet pas de limite réel lorsque h tend vers 0 donc f n'est pas dérivable en 0.
Conclusion : $f(x) = \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

5.2 Dérivabilité de la fonction valeur absolue

La fonction $f : x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$
Est-elle dérivable sur l'ensemble de définition ?
Si on regarde la courbe représentative de la fonction f on voit qu'en 0 elle admet deux tangentes différentes.
Elle ne semble donc pas dérivable en 0.
Étudions la dérivabilité en $x = 0$.
Soit $h \neq 0$:
$\tau_{[0+h;0]}(f) = \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{|h|}{h}$
Il y a donc deux cas possibles :

- ➟ Si $h > 0$ alors $\tau_{[0+h;0]}(f) = \dfrac{h}{h} = 1$ et donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau_{[0+h;0]}(f) = \lim\limits_{h \to 0} 1 = 1$
- ➟ Si $h < 0$ alors $\tau_{[0+h;0]}(f) = \dfrac{-h}{h} = -1$ et donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau_{[0+h;0]}(f) = \lim\limits_{h \to 0} -1 = -1$

Il y a donc deux limites différentes, donc f n'est pas dérivable en 0.

5.3 Variations d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction f il suffit d'après le cours précédent, d'étudier le signe de sa dérivée f'.
Exemple : $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 5}{x - 3}$
f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Calculons sa fonction dérivée en utilisant la forme $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$
On note

- ➟ $u : x \mapsto 2x^2 + 3x + 5$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- ➟ $v : x - 3$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

Alors $u'(x) = 4x + 3$ et $v'(x) = 1$
f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
et $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \dfrac{(4x + 3)(x - 3) - (2x^2 + 3x + 5)(1)}{(x - 3)^2} = \dfrac{2(x^2 - 6x - 7)}{(x - 3)^2}$
Il faut donc étudier le signe de $x^2 - 6x - 7$ puisque $(x - 3)^2$ est toujours positif.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(-7)(1) = 36 + 28 = 64 = 8^2$
donc $\Delta > 0$ et il y a deux racines réelles distinctes :

- ➟ $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6 + 8}{2} = 7$
- ➟ $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6 - 8}{2} = -1$

On obtient donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		3		7		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$f(-1) = -1$ et $f(7) = 28.5$
Le tableau des variations de f est donc :

x	$-\infty$		-1		3		7		$+\infty$
			-1		$\|\|$				
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$	
							28.5		

5.4 Vitesse et accélération

On note d la distance parcourue par un mobile, en fonction du temps t. La distance parcourue par le mobile à l'instant t est donc donnée par $d(t)$.

5.4.1 Vitesse moyenne et vitesse instantanée

Vitesse moyenne
La vitesse moyenne est la vitesse du mobile entre un instant t_1 et un instant t_2.
Elle est donnée par la formule :

$$\boxed{V_{\text{moyenne}}[t_1, t_2] = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}}$$

C'est le taux de variation de la fonction d entre t_1 et t_2

Exemple :
On suppose que la distance d'un mobile en fonction du temps est donnée par la fonction :
$d(t) = 50t^2$ ou d est en km et t en h
Calculons la vitesse moyenne du mobile entre $t = 1\ h$ et $t = 2\ h$.
$V_{\text{moyenne}}[1, 2] = \dfrac{d(2) - d(1)}{2 - 1} = \dfrac{200 - 50}{1} = 150\ km/h$
Vitesse instantanée
La vitesse instantanée est la vitesse du mobile à l'instant t_1.
Cela revient donc à faire tendre t_2 vers t_1 dans la formule de la vitesse moyenne et donc d'arriver à la formule suivante :

Si $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{d(t_1 + h) - d(t_1)}{h}$ existe et est un réel unique alors :

$$\boxed{V(t_1) = \lim_{h\to 0} \frac{d(t_1 + h) - d(t_1)}{h}}$$

C'est le nombre dérivé en t_1 de la fonction d

Exemple :
On suppose que la distance d'un mobile en fonction du temps est donnée par la fonction :
$d(t) = 50t^2$ ou d est en km et t en h
Calculons la vitesse instantanée du mobile à l'instant $t = 1\ h$.
d est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $d'(t) = 100t$ donc $V(1) = d'(1) = 100\ km/h$

5.4.2 Accélération moyenne et accélération instantanée

Accélération moyenne
L'accélération moyenne est l'accélération du mobile entre un instant t_1 et un instant t_2.
Elle est donnée par la formule :

$$\boxed{A_{\text{moyenne}}[t_1, t_2] = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(t_2) - V(t_1)}{t_2 - t_1}}$$

C'est le taux de variation de la fonction V entre t_1 et t_2

Exemple :
On suppose que la distance d'un mobile en fonction du temps est donnée par la fonction :
$d(t) = 50t^2$ ou d est en km et t en h
Calculons l'accélération moyenne du mobile entre $t = 1\ h$ et $t = 2\ h$.
On sait que la vitesse instantanée est donnée par la fonction $V(t) = 100t$, donc :
$A_{\text{moyenne}}[1, 2] = \dfrac{V(2) - V(1)}{2 - 1} = \dfrac{200 - 100}{1} = 100\ km/h^2$
Accélération instantanée
L'accélération instantanée est l'accélération du mobile à l'instant t_1.
Cela revient donc à faire tendre t_2 vers t_1 dans la formule de l'accélération moyenne et donc d'arriver à la formule suivante :

Si $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{V(t_1 + h) - V(t_1)}{h}$ existe et est un réel unique alors :

$$\boxed{A(t_1) = \lim_{h\to 0} \frac{V(t_1 + h) - V(t_1)}{h}}$$

C'est le nombre dérivé en t_1 de la fonction V

Exemple :
On suppose que la distance d'un mobile en fonction du temps est donnée par la fonction :
$d(t) = 50t^2$ ou d est en km et t en h
On sait que la vitesse instantanée est donnée par la fonction $V(t) = 100t$, donc :
Calculons l'accélération instantanée du mobile à l'instant $t = 1\ h$.
V est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $V'(t) = 100$ donc $A(1) = V'(1) = 100\ km/h^2$

5.5 Elasticité de la demande en fonction du prix

Rappel sur le taux d'accroissement :
Soit a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$.
Le taux d'accroissement entre a et b est le nombre réel t défini par : $t = \dfrac{b - a}{a}$

En économie, la sensibilité de la demande par rapport au prix se mesure grace a l'elasticité :
L'élasticité de la demande par rapport au prix est le rapport entre le taux d'accroissement de la demande par rapport au taux d'accroissement du prix.
Supposons que l'on arrive à traduire la demande d'un produit en fonction se son prix unitaire par une fonction $f : p \to f(p)$
p représente le prix unitaire d'un produit et $f(p)$ la demande pour ce produit en fonction du prix p.
On note e l'élasticité de la demande par rapport au prix entre p_1 et p_2 , et par définintion on a :

$$\frac{\dfrac{f(p_2) - f(p_1)}{f(p_1)}}{\dfrac{p_2 - p_1}{p_1}}$$

Si le prix p varie de 1 % alors la demande varie de e %
Supposons que le prix varie d'une petite quantité et donc que $p_2 = p_1 + h$ avec h un nombre proche de 0, alors on obtient :

$$\frac{\dfrac{f(p_1+h)-f(p_1)}{f(p_1)}}{\dfrac{p_1+h-p_1}{p_1}} = \frac{f(p_1+h)-f(p_1)}{f(p_1)} \times \frac{p_1}{h} = \frac{f(p_1+h)-f(p_1)}{h} \times \frac{p_1}{f(p_1)}$$

Si f est dérivable en p_1 et si on fait tendre h vers 0 alors on obtient :

$$\boxed{e(p_1) = \frac{p_1 f'(p_1)}{f(p_1)}}$$

Exemples :
La fonction suivante donne l'expression de la demande D d'un produit en fonction de son prix unitaire p :

$$D(p) = 100 - 5p + \frac{200}{2p+5}$$

Calculons l'élasticité pour $p = 10$ euros.
D est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}\}$
On note
➠ $u : p \mapsto 100 - 5p$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(p) = -5$
et
➠ $v : p \mapsto \dfrac{200}{2p+5}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}\}$ avec $v'(p) = -\dfrac{400}{(2p+5)^2}$
D est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}\}$ et $D'(p) = -5 - \dfrac{400}{(2p+5)^2}$
D'après la formule de l'élasticité, on a :

$$e(10) = \frac{10D'(10)}{D(10)}$$

Or $D'(10) = -5 - \dfrac{400}{25^2} = -5 - \dfrac{400}{625} = -5,64$
et $D(10) = 100 - 50 + \dfrac{200}{25} = 50 + 8 = 58$
Donc $e(10) = \dfrac{10 \times (-5,64)}{58} \approx 0.97$
donc pour un prix proche de 10 euros, si le prix varie de 1 % alors la demande varie de $0,97$ %.