Fiche 1

Barycentre de points pondérés dans le plan ou l'espace.

1 Barycentre de 2 points pondérés

1.1 Définitions

Définition 1 :
Le couple (A, α) où A est un point et α un réel s'appelle **un point pondéré**

Définition 2 :
(A, α) et (B, β) sont deux points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$. On appelle **barycentre** de (A, α) et (B, β) l'unique point G défini par :

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \qquad (1)}$$

Quelques remarques :

1. Si $\alpha = \beta$ on nomme G **l'isobarycentre** de A et B ou (**centre de gravité** de $[AB]$).
2. Si G barycentre de (A, α) et (B, β) alors $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$
   $\forall k \in \mathbb{R}$, $k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ donc G est aussi le barycentre de $(A, k\alpha)$ et $(B, k\beta)$
3. La relation (1) est équivalente à la relation :

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB} \qquad (2)}$$

1.2 Quelques propriétés

Soient α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et G un point du plan.

Théorème 1:

$$\boxed{G \text{ barycentre de } (A, \alpha) \text{ et } (B, \beta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}}$$

Théorème 2:

$$\boxed{G \text{ barycentre de } (A, \alpha) \text{ et } (B, \beta) \Leftrightarrow \forall M (\text{ point du plan }) \text{ , } \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}}$$

Théorème 3:

$$\boxed{G \text{ barycentre de } (A, \alpha) \text{ et } (B, \beta) \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \text{ , } G \text{ barycentre de } (A, k\alpha) \text{ et } (B, k\beta)}$$

Théorème 4:

$$\boxed{\text{Le barycentre } G \text{ de } (A, \alpha) \text{ et } (B, \beta) \text{ est situé sur la droite } (AB).}$$

1.3 Coordonnées du barycentre dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

Théorème 5:

Les coordonnées de G barycentre de (A, α) et (B, β) sont :

$$G\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{pmatrix}$$

(Moyenne pondérées des coordonnées de A et B)

2 Barycentre de trois points pondérés

2.1 Définitions et propriétés

Définition :
Si $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, on appelle barycentre de trois points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ), l'unique point G défini par :

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} \qquad (3)}$$

Soient α, β et γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et G un point du plan.
Théorème 6:

$$\boxed{\begin{array}{c} G \text{ barycentre de } (A,\alpha)\ ,\ (B,\beta) \text{ et } (C,\gamma) \\ \Leftrightarrow \\ AG=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC} \end{array}}$$

Théorème 7:

$$\boxed{\begin{array}{c} G \text{ barycentre de } (A,\alpha)\ ,\ (B,\beta) \text{ et } (C,\gamma) \\ \Leftrightarrow \\ \forall M(\text{ point du plan})\ ,\ \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} \end{array}}$$

2.2 Coordonnées du barycentre dans un repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$

Théorème 8:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Les coordonnées de } G \text{ barycentre de } (A,\alpha) \text{ et } (B,\beta) \text{ et } (C,\gamma) \text{ sont :} \\ G\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \end{pmatrix} \\ \text{(Moyenne pondérées des coordonnées de } A,\ B \text{ et } C \text{)} \end{array}}$$

2.3 Associativité du barycentre

Théorème 9 :(Associativité des barycentre)

Soit G le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ) avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$
Si $\alpha+\beta \neq 0$, on note H le barycentre de (A,α) et (B,β) {Barycentre partiel}
Alors G est aussi le barycentre de $(H,\alpha+\beta)$ et (C,γ).

3 Barycentre de plus de trois points pondérés

On peut étendre les définitions et théorèmes précédents lorsque l'on a plus de trois points pondérés.
Définition :
Soient α_1, α_2, ...,α_n, n réels tels que $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n \neq 0$ ou $\sum\limits_{i=1}^{i=n}\alpha_i \neq 0$
Le barycentre de $(A_1\alpha_1)$, (A_2,α_2), ...,(A_n,α_n) est l'unique point G tel que :

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\overrightarrow{0}$$

ou

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} \neq 0$$