Chapitre 1

Barycentre de points pondérés dans le plan ou l'espace.

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

1 Barycentre de 2 points pondérés

A et B sont deux points distincts du plan ou de l'espace, α et β sont deux réels.
L'objectif est de référencer tous les points M du plan ou de l'espace, vérifiant :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$$

Transformons cette relation, par équivalences, pour obtenir un seul vecteur contenant le point M :
$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{MA} + \beta(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{MA} = -\beta\overrightarrow{AB}$
$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{AM} = \beta\overrightarrow{AB}$
On obtient donc la relation équivalente :

$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{AM} = \beta\overrightarrow{AB}$$

Il faut donc envisager plusieurs cas :

1. Si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$ alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$ donc $M = B$
2. Si $\beta = 0$ et $\alpha \neq 0$ alors $\alpha\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0}$ donc $M = A$
3. Si $\alpha + \beta = 0$, $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ alors $\beta\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ or $\beta \neq 0$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ ce qui est impossible puisque A et B sont distincts.
4. Si $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ alors $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$. On peut donc construire un **unique** point M. On dit que M est le **barycentre** des points A et B affectés des coefficients α et β.
   On obtient donc la relation équivalente :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

1.1 Définitions

Définition 1 :
Le couple (A, α) où A est un point et α un réel s'appelle **un point pondéré**

Définition 2 :
(A, α) et (B, β) sont deux points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$. On appelle **barycentre** de (A, α) et (B, β) l'unique point G défini par :

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \qquad (1)}$$

Quelques remarques :

1. Si $\alpha = \beta$ on nomme G **l'isobarycentre** de A et B ou (**centre de gravité** de $[AB]$).
2. Si G barycentre de (A, α) et (B, β) alors $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$
   $\forall k \in \mathbb{R}$, $k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ donc G est aussi le barycentre de $(A, k\alpha)$ et $(B, k\beta)$
3. La relation (1) est équivalente à la relation :

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \qquad (2)}$$

Exemples :

- I est le milieu de $[AB]$ alors $\overrightarrow{IA} + IB = \overrightarrow{0}$ soit I bar $(A,1)(B,1)$ ou I isobarycentre de A et B.
- Construire le point G bar $(A,3)(B,-2)$
- Construire le point G bar $(A,-24)(B,36)$
- Construire le point G bar $(A,3)(B,-3)$

1.2 Quelques propriétés

Soient α et β deux réels tels que $\alpha+\beta \neq 0$ et G un point du plan ou de l'espace.

Théorème 1:

$$\boxed{G \text{ barycentre de } (A,\alpha) \text{ et } (B,\beta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}}$$

Démonstration :
➠ Si G barycentre de (A,α) et (B,β) avec $\alpha+\beta\neq 0$
alors $\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{0}$
alors $\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BA}+\beta\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{0}$
alors $(\alpha+\beta)\overrightarrow{AG} = -\beta\overrightarrow{BA}$
alors $(\alpha+\beta)\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB}$
et comme $\alpha+\beta\neq 0$ alors on peut diviser par $\alpha+\beta$ et on obtient : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$
➠ Réciproquement
Si $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$
alors $(\alpha+\beta)\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB}$
alors $\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{GB}$
alors $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$
donc G est le barycentre de (A,α) et (B,β) avec $\alpha+\beta\neq 0$

Exemples:

- Soit G le barycentre de $(M,3)$ et $(P,-4)$. Exprimer $\overrightarrow{MG}$ en fonction de $\overrightarrow{MP}$

Théorème 2:

$$\boxed{G \text{ barycentre de } (A,\alpha) \text{ et } (B,\beta) \Leftrightarrow \forall M(\text{ point du plan }),\ \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}}$$

Démonstration :
➠ Si G barycentre de (A,α) et (B,β) avec $\alpha+\beta\neq 0$
alors $\forall M$ du plan ,$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB} = \alpha\overrightarrow{MG}+\beta\overrightarrow{GA}+\alpha\overrightarrow{MG}+\beta\overrightarrow{GB}$ or $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$
donc $\forall M$ du plan ,$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB} = \alpha\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{MG}$
alors $\forall M$ du plan ,$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$
➠ Réciproquement
Si $\forall M$ du plan ,$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$
alors la relation est vraie aussi pour G
donc $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{GG}$
alors $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$
donc G est le barycentre de (A,α) et (B,β) *Exemples*:

- Soit G le barycentre de $(M,3)$ et $(P,-4)$. Exprimer $3\overrightarrow{NM}-4\overrightarrow{NP}$ en fonction de $\overrightarrow{NG}$

Théorème 3:

$$\boxed{G \text{ barycentre de } (A,\alpha) \text{ et } (B,\beta) \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R}^* \text{ , } G \text{ barycentre de } (A,k\alpha) \text{ et } (B,k\beta)}$$

Démonstration :
➠ Si G barycentre de (A,α) et (B,β) avec $\alpha+\beta \neq 0$
alors $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$
alors $\forall k \in \mathbb{R}^*$, $k\alpha\overrightarrow{GA}+k\beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$
donc G est le barycentre de $(A,k\alpha)$ et $(B,k\beta)$ car $k\alpha+k\beta \neq 0$
➠ Réciproquement
Si G est le barycentre de $(A,k\alpha)$ et $(B,k\beta)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ et $k\alpha+k\beta \neq 0$
alors $k\alpha\overrightarrow{GA}+k\beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$
or $k \neq 0$ donc on peut diviser par k
alors $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ et $\alpha+\beta \neq 0$
donc G est le barycentre de (A,α) et (B,β)

Exemples:

- Construire G le barycentre de $(A,-126)$ et $(B,168)$.

Théorème 4:

$$\boxed{\text{Le barycentre } G \text{ de } (A,\alpha) \text{ et } (B,\beta) \text{ est situé sur la droite } (AB).}$$

Démonstration :
➠ D'après le théorème 1 les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires
alors les points A,B et G sont alignés.
Remarques :

- Si α et β sont de même signe, alors $G \in [AB]$
- Si α et β sont de signes opposés, alors G n'appartient pas $[AB]$.

1.3 Coordonnées du barycentre dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

Théorème 5:

Les coordonnées de G barycentre de (A,α) et (B,β) sont :

$$G\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta} \\ \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}$$

(Moyenne pondérées des coordonnées de A et B)

Démonstration :
➠ D'après le théorème 2, avec $M = O$ on obtient : $\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{OG}$
Soient (x_A,y_A) et (x_B,y_B) les coordonnées de A et B dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
donc $\overrightarrow{OA} = x_A\overrightarrow{i}+y_A\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{OB} = x_B\overrightarrow{i}+y_B\overrightarrow{j}$
donc $(\alpha+\beta)\overrightarrow{OG} = (\alpha x_A+\beta x_B)\overrightarrow{i}+(\alpha y_A+\beta y_B)\overrightarrow{j}$
or $\alpha+\beta \neq 0$ donc on peut diviser par $\alpha+\beta$, ce qui nous donne :
$\overrightarrow{OG} = \dfrac{\alpha x_A+x_B}{\alpha+\beta}\overrightarrow{i}+\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\overrightarrow{j}$

Exemples:

- Calculer les coordonnées de G barycentre de $(A(4,-3),2)$ et $(B(-5,2),-5)$.

2 Barycentre de trois points pondérés

2.1 Définitions et propriétés

Définition :
Si $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, on appelle barycentre de trois points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ), l'unique point G défini par :

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} \qquad (3)}$$

Soient α, β et γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et G un point du plan.
Théorème 6:

$$G \text{ barycentre de } (A,\alpha) \text{ , } (B,\beta) \text{ et } (C,\gamma)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

Démonstration : A faire en exercice ...
Théorème 7:

$$G \text{ barycentre de } (A,\alpha) \text{ , } (B,\beta) \text{ et } (C,\gamma)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall M(\text{ point du plan}) \text{ , } \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

Démonstration : A faire en exercice ...

2.2 Coordonnées du barycentre dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

Théorème 8:

Les coordonnées de G barycentre de (A,α) et (B,β) et (C,γ) sont :

$$G\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \end{pmatrix}$$

(Moyenne pondérées des coordonnées de A, B et C)

Démonstration : A faire en exercice ...

Exemples: Soit G le barycentre de $(A,-3)$, $(B,2)$ et $(C,1)$.

1. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2. $\forall M$(point du plan), réduire $-3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$
3. Dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ les coordonnées de A, B et C sont $(2;3)$, $(-3,4)$ et $(-2,0)$. Calculer les coordonnées de G.

2.3 Associativité du barycentre

G est le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ) : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$
On suppose que $\alpha+\beta\neq 0$, alors :
Le barycentre de (A,α) et (B,β) existe et on le nomme H.
D'après le théorème 2, on a : $\forall M$ du plan, $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)MH$.
Cette propriété est donc vraie pour $M=G$ donc $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{GH}$.
donc $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GH}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$
Conclusion :
Si G est barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ) alors G est barycentre de $(H,\alpha+\beta)$ et (C,γ).
Théorème 9 :(Associativité du barycentre)

> Soit G le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ) avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$
> Si $\alpha+\beta\neq 0$, on note H le barycentre de (A,α) et (B,β) {Barycentre partiel}
> Alors G est aussi le barycentre de $(H,\alpha+\beta)$ et (C,γ).

Démonstration :
➠ G est le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ) avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$
H est le barycentre de (A,α) et (B,β) avec $\alpha+\beta\neq 0$
Alors $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$
donc $\alpha\overrightarrow{GH}+\alpha\overrightarrow{HA}+\gamma\overrightarrow{GH}+\gamma\overrightarrow{HB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$
or $\alpha\overrightarrow{HA}+\beta\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{0}$
donc $\alpha\overrightarrow{GH}+\gamma\overrightarrow{GH}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$
donc $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GH}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$
donc G est aussi le barycentre de $(H,\alpha+\beta)$ et (C,γ).

Exemples :

1. Si G est le barycentre de $(A,2)$, $(B,-2)$ et $(C,3)$. On peut regrouper A et C ou B et C mais pas A et B. Si H barycentre partiel de $(A,2)$ et $(C,3)$ alors G est le barycentre de $(B,-2)$ et $(H,5)$.
2. Si I est le barycentre de $(A,1)$ et $(B,3)$ et G le barycentre de $(I,4)$ et $(C,-1)$ alors G est aussi le barycentre de $(A,1)$, $(B,3)$ et $(C,-1)$.

3 Barycentre de plus de trois points pondérés

On peut étendre les définitions et théorèmes précédents lorsque l'on a plus de trois points pondérés.
Définition :
Soient α_1, α_2, …,α_n, n réels tels que $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\neq 0$ ou $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i\neq 0$
Le barycentre de $(A_1\alpha_1)$, (A_2,α_2), …,(A_n,α_n) est l'unique point G tel que :

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\overrightarrow{0}$$
ou
$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}\neq 0$$

Exercice :
Réécrire la section 2. pour un barycentre de quatre points pondérés.

4 Applications

4.1 Moyenne pondérée

Soit la série statistique ci-dessous :

Valeurs	α_1	α_2	...	α_p
Effectifs	n_1	n_2	...	n_p

Sur une droite graduée $(O, \overrightarrow{i})$, on note $A_1(\alpha_1)$, $A_2(\alpha_2)$, ..., $A_p(\alpha_p)$ des points sur cette droite.
La moyenne de la série est l'abscisse de G barycentre de (A_1, n_1), (A_2, n_2), ..., (A_p, n_p)
donc

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \cdots + \alpha_p n_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i n_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i}$$

Exemple :
Voici les notes d'un élèves, en mathématiques, pour le deuxième trimestre :

Notes	10	12	5	8,5	15	10	6,5	17
Coefficients	1	2	1	3	2	1	3	2

Calculer la moyenne de l'élève, en mathématiques, au deuxième trimestre.

4.2 Ensemble de points

Pour résoudre certain exercices de recherche de lieu de points, on utilise souvent des barycentres.
Exemples:

- Déterminer l'ensemble de points M tels que $\| 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \| = AB$
  On note G le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 1)$ alors $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$
  donc $\| 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \| = AB$
  donc $\| 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} \| = AB$
  donc $\| 2\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MG} \| = AB$
  donc $\| 3\overrightarrow{MG} \| = AB$
  donc $3 \| \overrightarrow{MG} \| = AB$
  donc $\| \overrightarrow{MG} \| = \frac{1}{3}AB$
  donc $MG = \frac{1}{3}AB$
  Conclusion :
  M appartient au cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{3}AB$
- Déterminer l'ensemble des points M tels que $\| \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \| = \| 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \|$
  On note G le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 3)$ donc $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$
  On note H le barycentre de $(A, 3)$ et $(C, 1)$ donc $3\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{0}$
  donc $\| \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{GB} \| = \| 3\overrightarrow{MH} + 3\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HC} \|$
  donc $\| \overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{MG} \| = \| 3\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MH} \|$
  donc $\| 4\overrightarrow{MG} \| = \| 4\overrightarrow{MH} \|$
  donc $\| \overrightarrow{MG} \| = \| \overrightarrow{MH} \|$
  donc $MG = MH$
  donc M appartient à la médiatrice du segment $[GH]$

4.3 Centre d'inertie

Définition :

En mécanique, le centre d'inertie d'un corps correspond au barycentre des particules qui composent le corps en question ; chaque particule étant pondérée par sa masse propre. C'est donc le point par rapport auquel la masse est uniformément répartie.

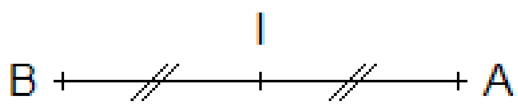
On note P une plaque, d'épaisseur négligeable. Le centre d'inertie de la plaque est l'isobarycentre de tous le spoints de la plaque. Le centre d'inertie I est difficile à définir car c'est la barycentre d'une infinité de points. Certaines règles que l'on peut admettre, vont nous permettre de le trouver dans certaisn cas :

4.3.1 Quelques règles

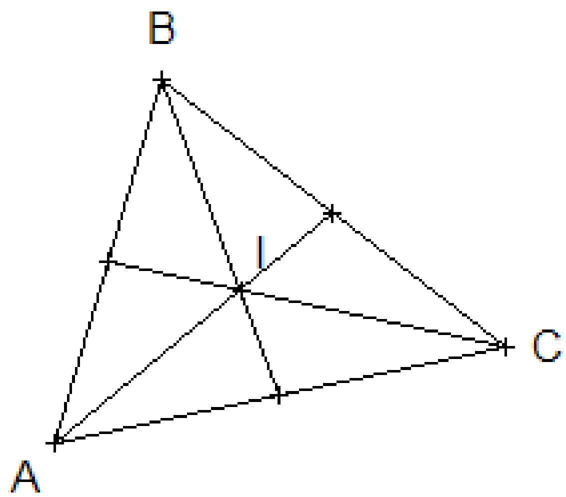
1. Si P admet un centre de symétrie, alors c'est son centre d'inertie.
2. Si P admet un axe de symétrie, alors son centre d'inertie est sur cet axe.
3. Si une plaque P_1 d'aire a_1 a pour centre d'inertie I_1 et une plaque P_2 d'aire a_2 a pour centre d'iertie I_2 alors la plaque $P_1 \cup P_2$ admet pour centre d'inertie la barycentre de (I_1, a_1) et (I_2, a_2).(Rq : Si les plaques sont homogènes on peut remplacer les aires par les masses.)
4. <u>Attention :</u> Le centre d'inertie est, en général, différent de l'isobarycentre des sommets de la plaque. (Voir exemple du quadrilatère ci-dessous)

4.3.2 Quelques figures simples

1. Le centre d'inertie d'une tige homogène est le milieu de cette tige.



2. Le centre d'inertie d'une plaque triangulaire homogène est l'isobarycentre de ses trois sommets.

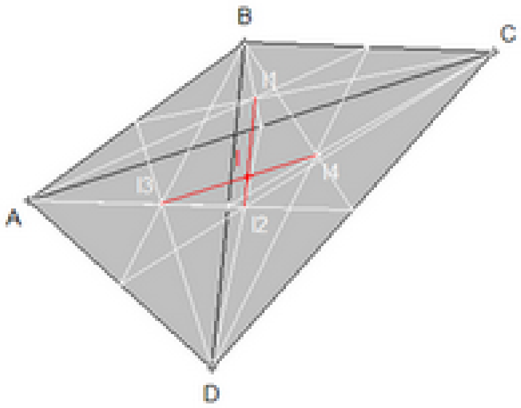


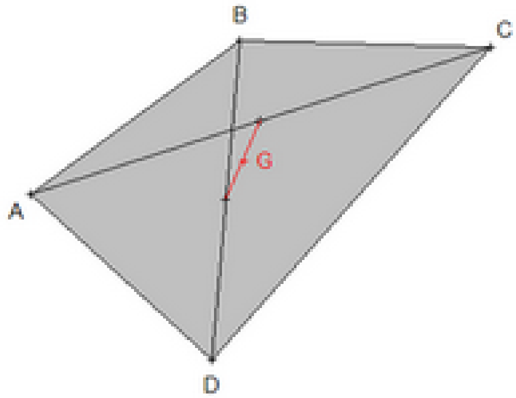
3. Le centre d'inertie d'un carré, rectangle, parallélogramme et losange, est leur centre de symétrie.

4.3.3 Centre d'inertie d'un quadrilatère

Dans la quadrilatère $ABCD$ ci-dessous :

1. Construire l'isobarycentre G de A,B,C et D. (Aide : Utiliser l'isobarycentre de A et C et l'isobarycentre de B et D)
2. Construire le centre d'inertie des triangles ABC et ACD.
3. Construire le centre d'inertie des triangles ABD et CBD.
4. En déduire le centre d'inertie I de ABCD.





✣ ✣ Fin du cours ✣ ✣