Exercice 1:

Étudier la convergence des suites suivantes :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $u_0 > 0$.
   $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$ donc la suite est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. $v_n = \dfrac{1+3^n}{2-3^n} = \dfrac{3^n\left(\dfrac{1}{3^n}+1\right)}{3^n\left(\dfrac{2}{3^n}-1\right)} = \dfrac{\dfrac{1}{3^n}+1}{\dfrac{2}{3^n}-1}$
   or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$.
   et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{3^n} = 2\times\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$.
   Conclusion : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -1$

3. On sait que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$
   donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{\sin(n)}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$
   donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $2-\dfrac{1}{n^2} \leq 2+\dfrac{\sin(n)}{n^2} \leq 2+\dfrac{1}{n^2}$
   donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $2-\dfrac{1}{n^2} \leq w_n \leq 2+\dfrac{1}{n^2}$
   De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-\dfrac{1}{n^2} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\dfrac{1}{n^2} = 2$
   Donc d'après le théorème d'encadrement (Théorème des gendarmes), $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$

4. $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $t_n = (-3)^n$
   On a $t_{n+1} = -3\times t_n$ et $t_0 = 1$
   donc c'est une suite géométrique de raison inférieure ou égal à -1 alors (t_n) diverge.

Exercice 2:

Calculer :

1. La somme des 13 premiers termes de la suite définie par son premier terme $u_2 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n$
   C'est une somme des termes d'une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_2 = 3$.
   $S_{14} = \displaystyle\sum_{k=2}^{14} 3\times 2^{k-2} = u_2 + u_3 + \ldots u_{14} = 3+6+12+24+\ldots+3\times 2^{14} = 3\times\frac{1-2^{13}}{1-2} = 24573$

2. La somme des 26 premiers termes de la suite définie par son premier terme $u_0 = -50$ et $u_{n+1} = u_n + 2$
   C'est une somme des termes d'une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -50$.
   $S_{25} = \displaystyle\sum_{k=0}^{25}(2k-50) = -50-48-46+\ldots+0 = 26\times\frac{-50+0}{2} = -650$

3. $S_{100} = \displaystyle\sum_{k=1}^{100}(-2)^k = -2+4-8+16+\ldots\ldots(-2)^{100}$
   C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison -2 et de premier terme -2.
   $S_{100} = -2\times\dfrac{1-(-2)^{100}}{1+2} = -\dfrac{2}{3}\left(1+2^{100}\right)$

4. $S_{75} = \displaystyle\sum_{k=0}^{75} 4k+3 = 3+7+11+\ldots+\ldots 303$
   C'est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme 3.
   $S_{75} = 76\times\dfrac{3+303}{2} = 11628$

Exercice 3:

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\ \overrightarrow{i}\,;\ \overrightarrow{j}\,;\ \overrightarrow{k})$.
On donne les points $A(-2;1;3)$ et $B(4;-4;0,5)$.
Les questions ci-dessous sont indépendantes :

1. Déterminer une équation du plan (P) passant par A et prallèle au plan (xOz).
   Le plan (P), parallèle au plan (xOz), a une équation du type $y = a$ où a est un réel.
   Comme A est un point de (P) alors $y = 1$ donc une équation cartésienne de (P) est $y = 1$.

2. $\mathcal{C}$ est le cylindre d'axe (Oz) et ayant pour base le cercle de centre O et de rayon 3.

   (a) Déterminer une équation du cylindre $\mathcal{C}$.
   $M(x; y; z) \in \mathcal{C}$
   $\Leftrightarrow MP = 3$ où P est le projeté orthogonal de M sur (Oz)
   $\Leftrightarrow MP^2 = 9$
   $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$
   Un équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $x^2 + y^2 = 9$.

   (b) B est-il un point de C ? (Justifier)
   $B(4; -4; 0,5)$: $4^2 + (-4)^2 = 32 \neq 9$ donc B n'est pas un point de $\mathcal{C}$.

3. $\mathcal{C}'$ est le cône de sommet O d'axe (Ox) passant par le point A.

   (a) Déterminer une équation de $\mathcal{C}'$.
   $M(x; y; z) \in \mathcal{C}' \Leftrightarrow \widehat{MOH} = \widehat{AOA}'$ où H et A' sont les projetés orthogonaux de M et A sur (Ox).
   $M \in \mathcal{C}' \Leftrightarrow \dfrac{MH}{OH} = \dfrac{AA'}{OA'} \Leftrightarrow \dfrac{MH^2}{OH^2} = \dfrac{AA'^2}{OA'^2}$.
   Donc une équation cartésienne de $\mathcal{C}'$ est $y^2 + z^2 = 2,5x^2$.

   (b) Déterminer, au degré près, l'angle α que forment les génératrices de ce cône avec l'axe (Ox).
   α est un angle aigu tel que $\tan^2(\alpha) = 2,5$ donc $\alpha \approx 58°$.

4. On considère la surfaces Q et S d'équations respectives $Q : x = -1$ et $S = x^2 + y^2 + z^2 = 8$.

   (a) Décrire les surfaces Q et S.
   Q : est le plan parallèle au plan (yOz) passant par le point de coordonnées $(-1; 0; 0)$.
   S : est la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

   (b) Existe-t-il des points d'ordonnée 2 communs à ces deux surfaces ? Précisez ces points.
   $M(x; 2; z) \in Q \cap S \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2^2 + z^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 1 + 4 + z^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ z = \pm\sqrt{3} \end{cases}$
   donc il existe deux points d'ordonnée 2 communs à ces deux surfaces : $I(-1; 2; \sqrt{3})$ et $J(-1; 2; -\sqrt{3})$

Exercice bonus : (Pour ceux qui ont terminé !!)

On note $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $A_0 = 1$ et $A_{n+1} = A_n - \dfrac{3}{5} \times (2)^n$
Exprimer A_n en fonction de n.
$A_n + A_{n-1} + A_{n-2} + \ldots + A_1 = A_{n-1} + A_{n-2} + \ldots + A_1 + A_0 - \dfrac{3}{5} \times 2^{n-1} - \dfrac{3}{5} \times 2^{n-2} + \ldots - \dfrac{3}{5} \times 2^0$
donc
$A_n = A_0 - \dfrac{3}{5} \times 2^{n-1} - \dfrac{3}{5} \times 2^{n-2} + \ldots - \dfrac{3}{5} \times 2^0$
donc
$A_n = 1 - \dfrac{3}{5} \times 2^{n-1} - \dfrac{3}{5} \times 2^{n-2} + \ldots - \dfrac{3}{5} \times 2^0$
On obtient une somme de termes d'une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $\dfrac{3}{5}$
donc
$A_n = 1 - \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1 - 2^n}{1 - 2} = 1 + \dfrac{3(1 - 2^n)}{5} = \dfrac{8 - 3 \times 2^n}{5}$