1. Étude du nombre k_n de côtés de F_n.

 (a) $\boxed{k_0 = 1}$, $\boxed{k_1 = 4}$, $\boxed{k_2 = 16}$ et $\boxed{k_3 = 64}$.

 (b) On a simplement $\boxed{k_{n+1} = 4 \times k_n}$ car chacun des côtés de F_n est remplacé par 4 côtés pour obtenir F_{n+1}.

 (c) (f_n) est donc une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $k_0 = 1$.
 donc $k_n = k_0 \times 4^n = 4$ donc $\boxed{k_n = 4^n}$.

2. Étude de la longueur l_n de la courbe F_n.

 (a) $\boxed{l_0 = a}$, $\boxed{l_1 = 4\left(\frac{a}{3}\right)}$, $\boxed{l_2 = 16\left(\frac{a}{9}\right)}$ et $\boxed{l_3 = 64\left(\frac{a}{27}\right)}$.

 (b) $l_{n+1} = l_n \times \left(\frac{4}{3}\right)$
 Donc (l_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{3}$ et de premier terme $l_0 = a$
 donc $\boxed{l_n = a \times \left(\frac{4}{3}\right)^n}$.

 (c) $\left(\frac{4}{3}\right)^9 \approx 13,3$ donc $\left(\frac{4}{3}\right)^9 > 10$.

 (d) $l_{54} = a\left(\frac{4}{3}\right)^{54} = a\left(\left(\frac{4}{3}\right)^9\right)^6$
 Or la fonction $x \mapsto x^6$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $\left(\frac{4}{3}\right)^9 > 10$ alors $\boxed{l_{54} > a10^6}$.

 (e) $\left(\frac{4}{3}\right)^9 > 10$ donc $\left(\left(\frac{4}{3}\right)^9\right)^{100} > 10^{100}$
 car la fonction $x \mapsto x^{100}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $\left(\frac{4}{3}\right)^{900} > 10^{100}$
 On peut donc prendre $\boxed{m = 900}$.

 (f) (l_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{4}{3} > 1$ donc elle diverge
 et en plus $\boxed{\lim_{n\to+\infty} l_n = +\infty}$ car $l_0 = a > 0$

3. Étude de l'aire A_n de la surface comprise entre F_n et le segment $[AB]$

 (a) $\boxed{A_0 = 0}$
 A_1 est l'aire d'un triangle équilatéral de côté $\frac{a}{3}$: $A_1 = \dfrac{\frac{a}{3} \times \frac{a}{2\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{a^2}{12\sqrt{3}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{36}$ donc $\boxed{A_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{36}}$
 A_2 est la somme de A_1 et de l'aire de quatre triangles équilatéraux de côté $\frac{a}{9}$
 donc $A_2 = A_1 + 4 \times \dfrac{\frac{a}{9} \times \frac{a\sqrt{3}}{18}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{36} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{81} = \dfrac{13a^2\sqrt{3}}{324}$ donc $\boxed{A_2 = \dfrac{13a^2\sqrt{3}}{324}}$

 (b) A_{n+1} est la somme de A_n et des aires de k_n triangles équilatéraux de côté $\frac{a}{3^{n+1}}$ donc :
 $$A_{n+1} = A_n + k_n \times \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2 \times 3^{n+1}} \times \frac{a}{3^{n+1}}}{2} = A_n + k_n \times \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3^{n+1}}\right)^2 = A_n + \frac{4^n \times a^2 \times \sqrt{3}}{3^{2n} \times 9 \times 4} = A_n + \frac{a^2\sqrt{3}}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$
 donc $\boxed{A_{n+1} = A_n + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{36}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n}$

(c) On ad onc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = A_n + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{36}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$

donc

$$A_n + A_{n-1} + \ldots + A_2 + A_1$$
$$= A_{n-1} + \frac{a^2\sqrt{3}}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} + A_{n-2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} + \ldots + A_1 + \frac{a^2\sqrt{3}}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^{1} + A_0 + \frac{a^2\sqrt{3}}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^{0}$$
$$= A_{n-1} + \ldots + A_2 + A_1 + A_0 + \left[\frac{a^2\sqrt{3}}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} + \frac{a^2\sqrt{3}}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} + \ldots + \frac{a^2\sqrt{3}}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^{1} + \frac{a^2\sqrt{3}}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^{0}\right]$$

donc

$$A_n + A_{n-1} - A_{n-1} + \ldots + A_2 - A_2 + A_1 - A_1$$
$$= A_0 + \left[\frac{a^2\sqrt{3}}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} + \frac{a^2\sqrt{3}}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} + \ldots + \frac{a^2\sqrt{3}}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^{1} + \frac{a^2\sqrt{3}}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^{0}\right]$$

donc

$$A_n = A_0 + \left[\frac{a^2\sqrt{3}}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} + \frac{a^2\sqrt{3}}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} + \ldots + \frac{a^2\sqrt{3}}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^{1} + \frac{a^2\sqrt{3}}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^{0}\right]$$

Dans le crochet il y a une somme de termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{4}{9}$ et de premier terme $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{36}$, donc :

$$A_n = A_0 + \left[\frac{a^2\sqrt{3}}{36} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}}\right] = A_n = A_0 + \left[\frac{a^2\sqrt{3}}{36} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{\frac{5}{9}}\right] = \frac{a^2\sqrt{3}}{20}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

donc $\boxed{A_n = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{20}\left[1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^n\right]}$

(d) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^6 \approx 0,008$ donc $\left(\dfrac{4}{9}\right)^6 < 10^{-2}$.

(e) Comme $\left(\dfrac{4}{9}\right)^6 < 10^{-2}$ alors $\left(\left(\dfrac{4}{9}\right)^6\right)^{50} < \left(10^{-2}\right)^{50}$ car la fonction $x \mapsto x^{50}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

donc $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{300} < 10^{-100}$

Comme $0 < \dfrac{4}{9} < 1$ alors pour tout $n \geq 300$ $\left|A_n - \dfrac{a^2\sqrt{3}}{20}\right| \leq \left|A_{300} - \dfrac{a^2\sqrt{3}}{20}\right|$

Or $\left|A_{300} - \dfrac{a^2\sqrt{3}}{20}\right| = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{20}\left(\dfrac{4}{9}\right)^{300} \leq \dfrac{a^2\sqrt{3}}{20} \times 10^{-100} < a^2 \times 10^{-100}$ car $\dfrac{\sqrt{3}}{20} < 1$

Donc à partir de $n = 300$ on a $\boxed{\left|A_n - \dfrac{a^2\sqrt{3}}{20}\right| < a^2 \times 10^{-100}}$

(f) D'après la question précédente $(A_n - \dfrac{a^2\sqrt{3}}{20})$ converge et sa limite est 0, donc (A_n) converge et sa limite est $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{20}$

4. On remarque que la longueur de la courbe F_n tend vers l'infini positif si n est de plus en plus grand mais que l'aire de la surface comprise entre F_n et $[AB]$ tend vers $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{20}$.

5. Le schéma ci-dessous n'est pas à l'échelle :