1 Homothétie de centre O et de rapport k

Définition :

L'homothétie de centre O et de rapport k ($k \in \mathbb{R}^*$)
est une application du plan dans lui même qui,
à tout point M, associe le point M' tel que :
$$\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$$
On note : $M' = h_{(O;k)}(M)$

Exemples :

1. Construire A' l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 3 :

2. Construire A' l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -3 :

3. Construire A' l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 1 :

4. Construire A' l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -1 :

5. Construire A' l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{5}{2}$:

2 Quelques propriétés

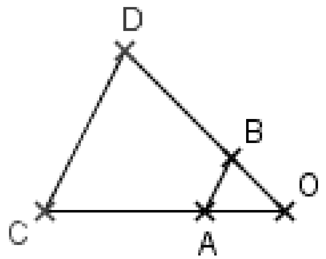
Propriété 1 :

> Si $M' = h_{(O;k)}(M)$ alors M, M' et O sont . . . .

Démonstration :
$\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$ donc
$\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont . . . .

Propriété 2 :

> Si $A' = h_{(O;k)}(A)$ et $B' = h_{(O;k)}(B)$ alors
>
> $\overrightarrow{A'B'} = \ldots\ldots\ldots\ldots$



Démonstration :
$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

donc $\overrightarrow{A'B'} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriété 3 :

> Les points invariants de $h_{(O;k)}$ sont :
> Si $k = 1$, ...
> Si $k \neq 1$, ...

Démonstration :
M est invariant si $\overrightarrow{OM} = k.\overrightarrow{OM}$ donc . . . .$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{0}$
donc . . . . ou . . . .

Propriété 4 :

> L'application réciproque de $h_{(O;k)}$ est :. . . . .
> donc $h^{-1}_{(O;k)} = \ldots\ldots\ldots$

Démonstration :
On a $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$ donc $\overrightarrow{OM} = \ldots\ldots\ldots$

Propriété 5 :

> La composée de deux homothéties $h_{(O;k)}$ et $h_{(O;k')}$ est :
> $h_{(O;k)} \circ h_{(O;k')} = \ldots\ldots\ldots$

Démonstration :
Si $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM''} = k'.\overrightarrow{OM'}$ alors :
$\overrightarrow{OM''} = k'.(\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots.\overrightarrow{OM}$