

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

Durée : 1h / Calculatrice autorisée : **Oui**.

Exercice 01 : (12 points)

Un jeu consiste à jeter **un dé équilibré** et à lancer deux fois de suite **une pièce de monnaie truquée** suivant le résultat du dé.

Pour ce jeu, on dispose de deux pièces de monnaie non équilibrées et de couleur distinctes (or et argent).

On note α la probabilité d'obtenir "Pile" pour la pièce argentée, ainsi que la probabilité d'obtenir "Face" pour la pièce dorée.

Si on obtient 6 avec le dé, on jette deux fois de suite la pièce dorée. Si on obtient un autre numéro, on jette deux fois la pièce argentée.

On note :

S : "On obtient 6 avec le dé."

P_1 : "On obtient Pile au premier lancer."

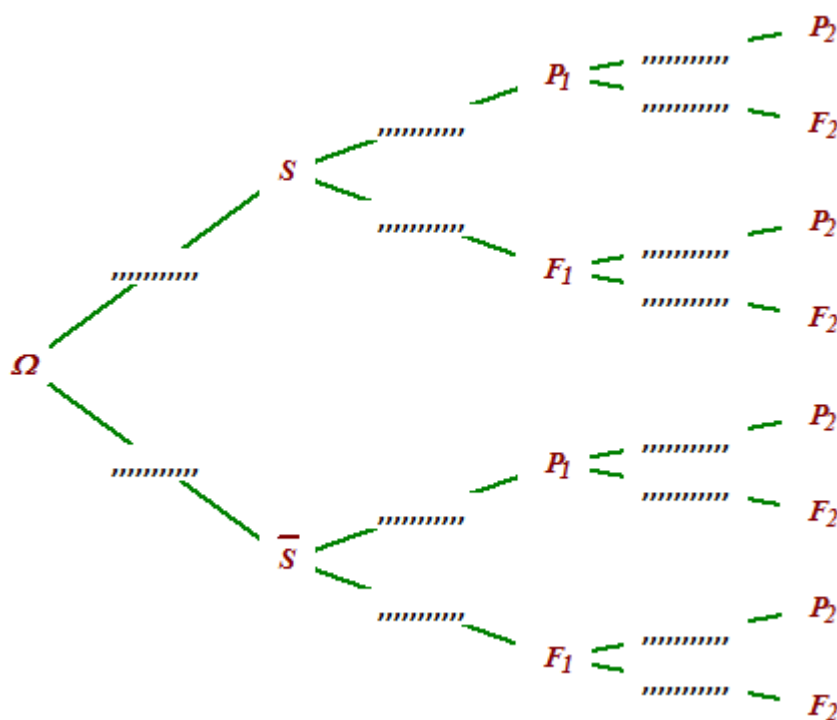
F_1 : "On obtient Face au premier lancer."

P_2 : "On obtient Pile au second lancer."

F_2 : "On obtient Face au second lancer."

- On suppose dans cette question que $\alpha = \frac{1}{3}$

(a) Compléter l'arbre ci-dessous :



(b) Calculer la probabilité d'obtenir "Pile" au premier lancer, donc $p(P_1)$.

(c) Montrer que la probabilité d'obtenir deux fois "Pile" est de $\frac{3}{18}$.

2. On suppose dans cette question que α est un nombre dans $[0; 1]$ et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de "Pile" obtenu.
- Faire un arbre de probabilité résumant cette situation.
 - Calculer en fonction de α la probabilité $p(X = 2)$.
 - Montrer que $p(X = 2) = 0,54$ est équivalente à $3\alpha^2 - \alpha - 1,12 = 0$.
 - Déterminer les valeurs de α pour que la probabilité d'obtenir deux fois "Pile" soit de 0,54.

Exercice 02 : (2 points)

$n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire réelle avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Par définition on sait que $V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p(X = x_i)$

Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Exercice 03 : (6 points)

Un jeu consiste à choisir au hasard un nombre entre 51 et 99 et à gagner la somme des chiffres obtenue.

Pour jouer à ce jeu, la mise de départ est de 12 euros.

Soit X la variable aléatoire correspondant au gain obtenu à ce jeu.

- Compléter le tableau ci-dessous.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5										
6										
7										
8										
9										

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Déterminer l'espérance de X . Interpréter ce résultat.
- Déterminer $p(X \leq 0)$ et $p(X \geq 0)$.
- Calculer l'écart-type de X .

Exercice 04 : (Bonus)

On note X une variable aléatoire réelle, $X(\Omega) = \{1, 2, \dots, 5\}$ telle que pour tout $k \in X(\Omega)$,

$p(X = k) = \frac{1}{k}$. On note Y la variable aléatoire réelle telle que $Y = \frac{1}{X}$.

Calculer $E(X)$ puis montrer que $E(Y) = \frac{5269}{3600}$.