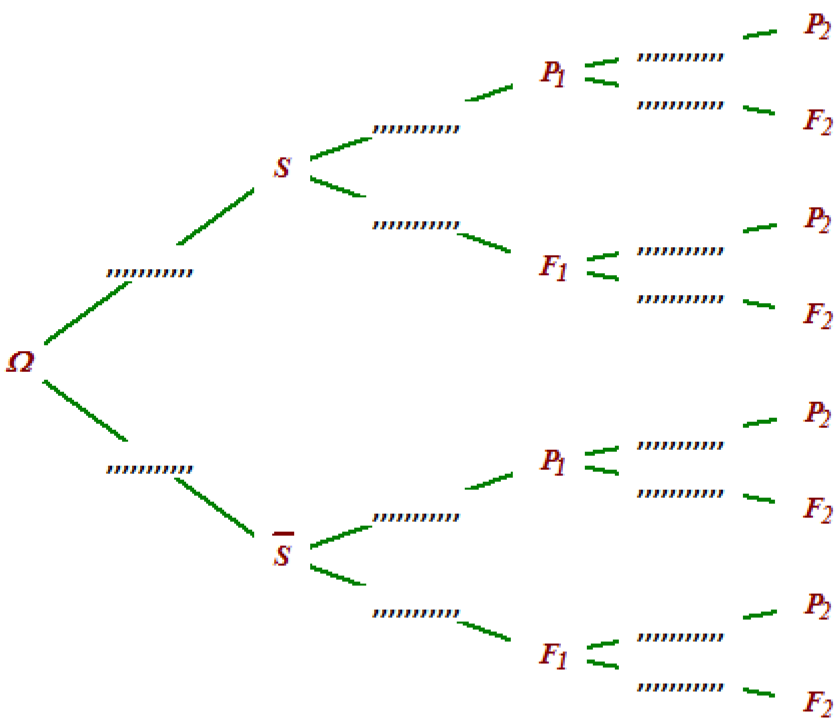
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.
Durée : 1h / Calculatrice autorisée : **Oui**.

Exercice 01 : (12 points)

Un jeu consiste à jeter **un dé équilibré** et à lancer deux fois de suite
une pièce de monnaie truquée suivant le résultat du dé.
Pour ce jeu, on dispose de deux pièces de monnaie non équilibrées et de couleur distinctes (or et argent).
On note α la probabilité d'obtenir "Pile" pour la pièce dorée, ainsi que la probabilité d'obtenir "Face" pour la pièce argentée.
Si on obtient 6 avec le dé, on jette deux fois de suite la pièce dorée. Si on obtient un autre numéro, on jette deux fois la pièce argentée.
On note :
S : "On obtient 6 avec le dé."
P_1 : "On obtient Pile au premer lancer."
F_1 : "On obtient Face au premier lancer."
P_2 : "On obtient Pile au second lancer."
F_2 : "On obtient Face au second lancer."

1. On suppose dans cette question que $\alpha = \dfrac{1}{3}$

   (a) Compléter l'arbre ci-dessous :



   (b) Calculer la probabilité d'obtenir "Pile" au premier lancer, donc $p(P_1)$.

   (c) Montrer que la probabilité d'obtenir deux fois "Pile" est de $\dfrac{7}{18}$.

2. On suppose dans cette question que α est un nombre dans $[0;1]$ et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de "Pile" obtenu.
   (a) Faire un arbre de probabilité résumant cette situation.
   (b) Calculer en fonction de α la probabilité $p\,(X=2)$.(Ne pas justifier les calculs)
   (c) Montrer que $p\,(X=2)=0,14$ est équivalente à $3\alpha^2-5\alpha+2,08=0$.
   (d) Déterminer les valeurs de α pour que la probabilité d'obtenir deux fois "Pile" soit de $0,14$.

Exercice 02 : (2 points)

$n\in\mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire réelle avec $X(\Omega)=\{x_1,x_2,...,x_n\}$.

Par définition on sait que $V(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2\,p(X=x_i)$

Montrer que $V(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2p(X=x_i)-(E(X))^2$

Exercice 03 : (6 points)

Un jeu consiste à choisir au hasard un nombre entre 1 et 50 et à gagner la somme des chiffres obtenue.
Pour jouer à ce jeu, la mise de départ est de 13 euros.
Soit X la variable aléatoire correspondant au gain obtenu à ce jeu.

1. Compléter le tableau ci-dessous.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										
2										
3										
4										
5										

2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Déterminer l'espérance de X. Interpréter ce résultat.
4. Déterminer $p(X\leq 5)$ et $p(X\geq 0)$.
5. Calculer l'écart-type de X.

Exercice 04 :(Bonus)

On note X une variable aléatoire réelle, $X(\Omega)=\{1,2,...,5\}$ telle que pour tout $k\in X(\Omega)$, $p(X=k)=\dfrac{1}{k}$. On note Y la variable aléatoire réelle telle que $Y=\dfrac{1}{X}$.
Calculer $E(X)$ puis montrer que $E(Y)=\dfrac{5269}{3600}$.