La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.
Durée : 1h30 / Calculatrice autorisée : **Oui**.

Exercice 01 : (3 points)

Cet exercice est un QCM. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. On ne demande pas de justifier votre réponses. Une réponse fausse enlève 0.25, une réponse juste rapporte 1 point et une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève rien. Répondre en cochant correctement la bonne réponse.

On note $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x} - 2\sqrt{x}$.

1. (Question 01) La fonction f est
   - ❏ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
   - ❏ définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$
   - ❏ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$
   - ❏ définie sur $\mathbb{R}^*_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$
2. (Question 02) la fonction f' est définie par
   - ❏ $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
   - ❏ $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
   - ❏ $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
   - ❏ $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
3. (Question 03) l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est
   - ❏ $y = f'(a)x + f(a)$
   - ❏ $y = f(a)(x - a) + f'(a)$
   - ❏ $y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$
   - ❏ $y = f'(a)(x - a) - f(a)$

Exercice 02 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]-4; +\infty[$ par $f : x \mapsto \dfrac{x^3 - 2}{x + 4}$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto 2x^3 + 12x^2 + 2$

1. Déterminer $g'(x)$
2. Etudier les variations de g sur $]-4; +\infty[$.
3. Justifier que pour tout $x \in]-4; +\infty[$, $g(x) > 0$
4. Démontrer que pour tout $x \in]-4; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+4)^2}$
5. Déterminer les variations de la fontion f sur $]-4; +\infty[$.

Exercice 03 : (2 points)

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f : x \mapsto (x+1)\sqrt{x}$
Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$, $f(x)$ vérifie l'équation

$$xf'(x) - f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}(x-1)$$

Exercice 04 : (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
On note $A(2;3)$, $B(0;1)$, $C(3;-2)$ et $D(0;-1)$

1. Déterminer une équation cartésienne de (AB).
2. Déterminer une équation cartésienne de (DC).
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre (AB) et (DC).
4. Les droites (BD) et (AC) sont-elles parallèles ? (Justifier)

Exercice 05 : (2 points)

On note (D) la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
Démontrer que $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (D).

Exercice 06 :(3 points)

Soit m un réel et soit (D_m) la droite d'équation :

$$m^2x - (m-1)y - 1 = 0$$

1. Pour quelles valeurs de m, la droite passe-t-elle par le point $A(-1;1)$?
2. Pour quelle valeur de m, le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ est-il directeur de (D_m) ?
3. Pour quelles valeurs de m la droite (D_m) est parallèle à la droite d'équation $5x - 3y + 4 = 0$?

Exercice Bonus

On note f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f : x \mapsto 1 - \left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)$$

Déterminer les variations de la fonction f.