Niveau :

Première ES

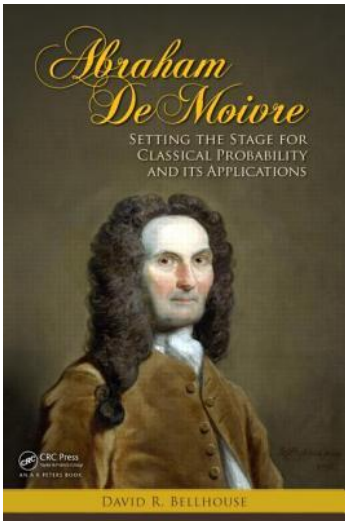
Titre Cours :

Loi Binomiale

Echantillonnage et estimation

Année :

2016-2017



Abraham de Moivre (1667-1754)
Mathématicien Français

Citation du moment :

«Un probabiliste est une personne qui peut avoir la tête dans un four et les pieds pris dans la glace tout en disant qu'en moyenne il se sent bien» (Anonyme : Livre de Patrick Bogaert)

I. Loi binomiale

a. Introduction

Pour se rendre sur son lieu de travail, un cycliste rencontre trois feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est $p = 0,23$ avec $0 < p < 1$. On assimilera le feu orange au feu rouge puisque dans les deux cas, le cycliste s'arrête, ce qui revient à considérer que le feu n'a que les deux couleurs vert et rouge.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de feux verts rencontrés par le cycliste lors de son trajet.

1. Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire X ?

2. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

3. Les événements « obtenir le premier feu vert », « obtenir le deuxième feu vert » et « obtenir le troisième feu vert » sont-ils indépendants ? Pourquoi ?

4. Calculer $P(X=0)$ et $P(X=3)$

5. Déterminer la loi de probabilité de X en dressant le tableau ci-dessous

$X=k$				
$P(X=k)=.....\times p^{.....}\times(1-p)^{.....}$				
$P(X=k)\approx......$				

6. Pouvez-vous donner une formule générale sur l'expression de $P(X=k)$?

7. Que représentent les nombres de cette formule ?

8. Donner l'espérance de X puis son interprétation.

9. Quelle formule peut-on conjecturer pour la formule de l'espérance.

10. Déterminer la probabilité de rencontrer au plus deux feux verts.

11. Déterminer la probabilité de rencontrer au moins un feu vert.

12. Déterminer $P(X<2)$ et interpréter le résultat.

b. Définition et propriétés de la loi de Bernoulli.

Définition : Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues, l'une appelée succès (S) et l'autre échec.

Exemples :

Exemple 1 : On tire une carte dans un jeu de 32 et on s'intéresse au succès « obtenir un roi »

Exemple 2 : On répond à une question d'un QCM et on s'intéresse au succès « obtenir la bonne réponse ».

Définition : On nomme **loi de Bernoulli**, la loi de la variable aléatoire X qui est égale à 1 si on obtient un succès et à 0 sinon. On a donc $\Omega = \{0;1\}$

$X=k$	0	1
$P(X=k)$	$1-p$	p

Définition : On nomme **schéma de Bernoulli**, une répétition d'épreuves de Bernoulli <u>identiques</u> et <u>indépendantes</u>.

Exemples :

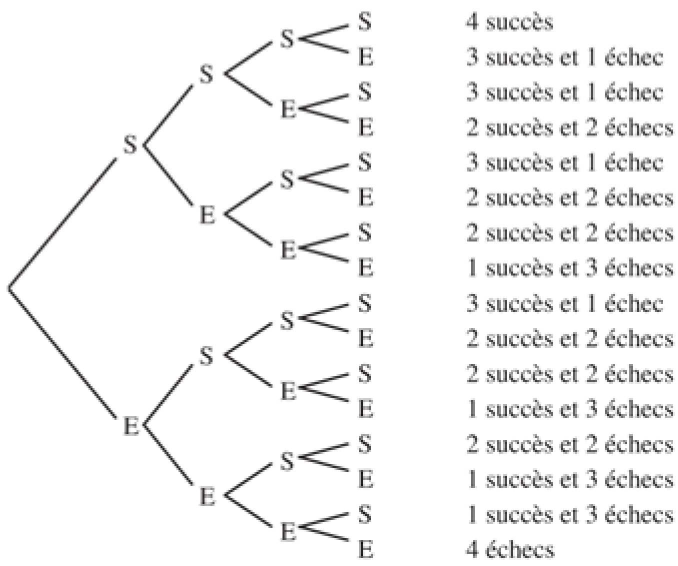
Exemple 1 : On tire successivement avec remise 8 cartes d'un jeu de 32.

Exemple 2 : Un QCM comprend 10 questions auxquelles on répond « vrai » ou « faux ». Un élève répond au hasard à toutes les questions.

Exemple 3 : On lance 8 fois un dé parfait. On s'intéresse au nombre de fois où l'on obtient un nombre pair.

Remarque : Un schéma de Bernoulli peut se représenter par un arbre, mais dès que l'on dépasse 4 répétitions, l'arbre devient compliqué à construire.

Voilà la représentation d'un schéma de Bernoulli, pour 4 répétitions de l'épreuve de Bernoulli.



L'objectif de la suite du cours est de déterminer la probabilité d'obtenir k succès lorsque l'on fait n épreuves de Bernoulli, sachant que $k \in \{0,...,n\}$

c. Propriété des coefficients binomiaux.

Définition : On note n et k deux entiers positifs ou nuls avec $k \leq n$.

Le nombre $\binom{n}{k}$ représente **le nombre de branches du schéma de Bernoulli (pour n épreuves) qui comporte k succès**. C'est aussi le nombre de façons de choisir k objets parmi n sans tenir compte de l'ordre.

Ce nombre s'écrit aussi C_n^k dans les anciens documents.

On nomme $\binom{n}{k}$ **le coefficient binomial de k parmi n**.

Exemples :

$\binom{2}{0} =$

$\binom{2}{2} =$

$\binom{2}{1} =$

Propriétés :

- Pour tout entier $n \geq 1$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- Pour tout entiers n et k tels que $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Pour tout entiers n et k tels que $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$ $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Démonstration :

Pour déterminer rapidement les coefficients binomiaux, on peut utiliser le triangle de Pascal que l'on détermine grâce aux propriétés précédentes :

$n \backslash k$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	$\binom{0}{0}=1$					
1	$\binom{1}{0}=1$	$\binom{1}{1}=1$				
2	$\binom{2}{0}=1$	$\binom{2}{1}=2$	$\binom{2}{2}=1$			
3	$\binom{3}{0}=1$	$\binom{3}{1}=3$	$\binom{3}{2}=3$	$\binom{3}{3}=1$		
4	$\binom{4}{0}=1$	$\binom{4}{1}=\ldots\ldots$	$\binom{4}{2}=\ldots\ldots$	$\binom{4}{3}=\ldots\ldots$	$\binom{4}{4}=1$	
5	$\binom{5}{0}=1$	$\binom{5}{1}=\ldots\ldots$	$\binom{5}{2}=\ldots\ldots$	$\binom{5}{3}=\ldots\ldots$	$\binom{5}{4}=\ldots\ldots$	$\binom{5}{5}=1$

Formule des coefficients binomiaux : (hors programme mais intéressant)

Pour tout entiers n et k tels que $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$ $\quad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Où $n!=1\times 2\times 3\times \ldots \times n=\prod_{k=1}^{n} k$

Exemple : $\binom{6}{4}=$

Dans un schéma de Bernoulli comportant 6 épreuves, il y donc ………. branches contenant 4 succès.

d. Définition et propriétés de la loi Binomiale

Définition :

On considère un schéma de Bernoulli, répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p (la probabilité de succès de chaque épreuve).

On note X la variable aléatoire qui compte **le nombre de succès lors de ces n épreuves**.

La loi de probabilité de X est appelé **loi binomiale de paramètres n et p**. On écrira dans ce cas que X suit une loi $B(n,p)$

Propriété :

Si X suit une loi $B(n,p)$ alors la probabilité d'obtenir k succès sur les n épreuves est

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Démonstration :

Exemples :

1. On tire successivement avec remise 8 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 5 rois ?
2. Un QCM comprend 10 questions auxquelles on répond "Vrai" ou "Faux". Un élève répond au hasard à toutes les questions. A-t-il autant de chances de répondre exactement à 3 questions que de répondre exactement à 7 ?
3. On lance 8 fois un dé parfait. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins trois fois un nombre pair ?
4. Une branche présente 10 fleurs blanches ou roses réparties au hasard. On compte 2 fleurs blanches et 8 fleurs roses. On cueille successivement et au hasard 3 fleurs. Peut-on modéliser le nombre de fleurs blanches parmi les 3 cueillies par une loi binomiale ? pourquoi ?

e. Espérance, variance et écart-type.

Propriété (admise)

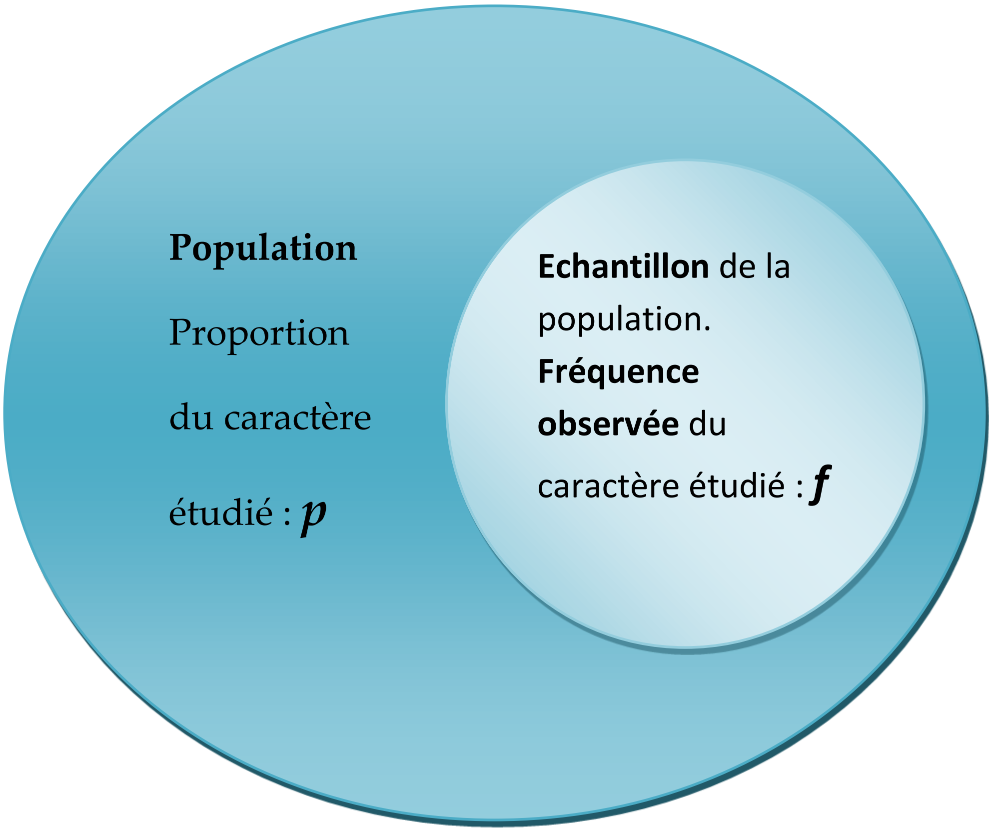
Si X suit une loi $B(n,p)$ alors

$$E(X)=np$$

$$V(X)=np(1-p)$$

$$\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$$

II. Echantillonnage et Estimation



On souhaite étudier un caractère dans une population (Ex : Ceux qui ont voté pour un candidat, …….).

Deux possibilités s'offrent à nous :

- **Echantillonnage** : Soit on connaît la **proportion p** d'individus ayant ce caractère dans l'ensemble de la population et on souhaite savoir dans quel intervalle va fluctuer (**intervalle de fluctuation**) la fréquence de ce caractère dans un échantillon obtenu.
  Si la fréquence *f* de l'échantillon est dans l'intervalle de fluctuation, alors on dira que l'échantillon est représentatif de la population.

- **Estimation** : Soit on ne connaît pas la proportion d'individus ayant ce caractère dans la population. On prélève un échantillon de la population et on détermine la **fréquence** de ce caractère apparaissant dans l'échantillon. Cette fréquence nous permet d'estimer **un intervalle de confiance** dans lequel fluctue la **proportion p** du caractère dans la population totale. Cela permet, par exemple, de faire des sondages et d'estimer le pourcentage de vote pour un candidat, sur une population complète.

Définition 01 : Intervalle de fluctuation (p connue ou conjecturé)

Soit α un réel de l'intervalle $]0,1[$

L'intervalle de fluctuation au seuil de $100(1-\alpha)$ %, relatif aux échantillons de taille n, est l'intervalle centré autour de p qui contient la fréquence observée f dans un échantillon de taille n avec une probabilité égale à $1-\alpha$.

Définition 01 : Intervalle de confiance (p est inconnu)

Soit α un réel de l'intervalle $]0,1[$

L'intervalle de confiance au seuil de $100(1-\alpha)$ %, relatif aux échantillons de taille n, est l'intervalle centré autour de f où se situe la proportion p du caractère dans la population avec une probabilité égale à $1-\alpha$.

III. Rappels de seconde

Soit p la proportion effective d'un caractère d'une population comprises entre 0,2 et 0,8 et f la fréquence du caractère dans un échantillon de taille n supérieure ou égale à 25. **L'intervalle de fluctuation** au seuil de 95 % $(\alpha = 0.05)$ est

$$I_f = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Soit f la fréquence observée d'un caractère d'un échantillon (de taille ≥ 25) comprises entre 0,2 et 0,8 et p la proportion du caractère dans la population.

L'intervalle de confiance au seuil de 95 % $(\alpha = 0.05)$ est

$$I_p = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Exemple 01 :

Dans un village de campagne à proximité d'industries chimiques, il est né entre l'année 2001 et 2005, 164 enfants dont 56 garçons.

Cela est-il normal ?

Exemple 02 :

Le 4 mai 2007, sit deux jours avant le second tour des élections présidentielles, on publie le sondage suivant réalisé auprès de 992 personnes :

Ségolène Royal : 45 %　　　　Nicolas Sarkozy : 55 %

Comment pouvez-vous interpréter ce sondage ?

1. Première ES

Le tirage au hasard d'un individu dans une population est une épreuve de Bernoulli de paramètre p, où le succès est l'issue « avoir le caractère étudié »

Le prélèvement au hasard d'un échantillon de taille n dans cette population s'assimile dans à un schéma de Bernoulli de paramètre n et p.

La variable aléatoire X, qui compte le nombre d'individus ayant le caractère étudié, suit une loi Binomiale $B(n,p)$

La fréquence du caractère étudié dans l'échantillon est donc donnée par la variable aléatoire $F = \frac{X}{n}$

Définition : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n,p)$ et $F=\frac{X}{n}$ la variable aléatoire qui correspond à la fréquence f du caractère étudié.

L'intervalle de fluctuation de f au seuil 95 % fourni par la loi binomial est le plus petit intervalle de la forme $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$ où a et b sont des entiers entre 0 et n tels que :

$P\left(F<\frac{a}{n}\right)\leq 0{,}025$ et $P\left(F>\frac{b}{n}\right)\leq 0{,}025$ et donc $P\left(\frac{a}{n}\leq F\leq\frac{b}{n}\right)\geq 0{,}95$

Remarque : Le prélèvement au hasard d'un échantillon de taille n consiste en n répétitions d'un tirage avec remise. Mais si les tirages s'effectuent sans remise, l'assimilation à un schéma de Bernoulli est encore possible lorsque la population est suffisamment grande en regard de n.

Définition : Soit f la fréquence observée d'un caractère d'un échantillon (de taille ≥ 25) comprises entre 0,2 et 0,8 et p la proportion du caractère dans la population.

L'intervalle de confiance au seuil de 95 % ($\alpha=0.05$) est

$$I_p=\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$