Suites Arithmétiques et Géométriques

Première S

L'équipe des professeurs de mathématiques
Lycée Stendhal

" Le but des mathématiques est de déterminer les grandeurs les unes par les autres, d'après les relations précises qui existent entre elles. "

Auguste comte (Philosophe Français)

Année 2016-2017

Liste des savoirs et savoir-faire du chapitre :

CODE	INTITULE	Bilan		
		A	EA	NA
	Reconnaître une suite arithmétique			
	Démontrer qu'une suite est arithmétique			
	Connaître et utiliser la formule de récurrence (arithmétique)			
	Connaître et savoir utiliser la formule explicite (arithmétique)			
	Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique.			
	Reconnaître une suite géométrique			
	Démontrer qu'une suite est géométrique			
	Connaître et utiliser la formule de récurrence (géométrique)			
	Connaître et savoir utiliser la formule explicite (géométrique)			
	Calculer la somme des termes d'une suite géométrique.			

Compétences dans tous les chapitres :

INTITULE	Bilan		
	A	EA	NA
Chercher			
Modéliser			
Représenter			
Calculer			
Raisonner			
Communiquer			

Contents

1 Les suites arithmétiques

1.1 Définition et vocabulaire

Définition 1

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique si et seulement si pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours la même constante r.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r \text{ avec } r \in \mathbb{R}$$

Exêmple :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n + 4$

1.2 Différentes formules

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p, $p \in \mathbb{N}$

Formule 1

Formule par **récurrence** :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $n \geq p$, u_p étant donné,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Formule 2

Formule **explicite** :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $n \geq p$,

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Explication pour la formule explicite. La démonstration rigoureuse demande une technique de démonstration que vous allez voir en terminale : La démonstration par récurrence.

Cas les plus courant :

➠ Si le premier terme est u_0 alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + nr$$

➠ Si le premier terme est u_1 alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

Comment démontrer qu'une suite est arithmétique ?

Pour démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, il faut étudier la différence entre u_{n+1} et u_n.
Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est une constante (résultat indépendant de n).
Exemple :
On note u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3(n-1)+5$

1.3 Variations

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p, $p \in \mathbb{N}$

Propriété 1

Si $r > 0$ alors $(u_n)_{n\geq p}$ est croissante.
Si $r < 0$ alors $(u_n)_{n\geq p}$ est décroissante.
Si $r = 0$ alors $(u_n)_{n\geq p}$ est constante.

Démonstration :

1.4 Somme des p premiers termes

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_1, $p \in \mathbb{N}$
On note

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n$$

On cherche à calculer S_n en fonction de n.

Première étape Exprimons S_n en fonction de u_1

Deuxième étape Exprimons S_n en fonction de u_n

Troisième étape Additionnons les deux formules ci-dessus :

Formule plus générale :

Propriété 2

$$S_n = \frac{\text{Nombre de termes} \times (\text{Premier terme} + \text{Dernier terme})}{2}$$

Exemple très souvent utilisé :
$1 + 2 + 3 + 5 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
Donc si on souhaite calculer la somme des entiers positifs juqu'à 45000 on obtient :
$1 + 2 + 3 + 5 + \ldots + 45000 = \dfrac{45000(45000+1)}{2} = 1012522500$

2 Les suites géométriques

2.1 Définition et vocabulaire

Définition 2

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique si et seulement si pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par la même constante q.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n \text{ avec } q \in \mathbb{R}$$

2.2 Différentes formules

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p, $p \in \mathbb{N}$

Formule 3

Formule par **récurrence** :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $n \geq p$, u_p étant donné,

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Formule 4

Formule **explicite** :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $n \geq p$,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Explication pour la formule explicite. La démonstration rigoureuse demande une technique de démonstration que vous allez voir en terminale : La démonstration par récurrence.

Cas les plus courant :

➠ Si le premier terme est u_0 alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

➠ Si le premier terme est u_1 alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

Comment démontrer qu'une suite est géométrique ?
Pour démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, il faut montrer que u_{n+1} peut s'exprimer comme $u_n \times q$, où q est une constante (résultat indépendant de n).
Exemple :
On note u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{4\times 3^n}{5^{n-1}}$

2.3 Variations

➠ On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme u_p, $p \in \mathbb{N}$

Propriété 3

Premier cas : Si u_p positif

Si $q \geq 1$, alors $(u_n)_{n\geq p}$ est croissante.
Si $0 < q \leq 1$, alors $(u_n)_{n\geq p}$ est décroissante.

Deuxième cas : Si u_p négatif

Si $q \geq 1$, alors $(u_n)_{n\geq p}$ est décroissante.
Si $0 < q \leq 1$, alors $(u_n)_{n\geq p}$ est croissante.

➠ On note $(u_n)_{n\geq p}$ une suite géométrique de raison $q < 0$ et de premier terme u_p, $p \in \mathbb{N}$
Les termes de la suites sont alternativement positifs et négatifs, donc la suite n'est pas monotone.

2.4 Somme des p premiers termes

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_1, $p \in \mathbb{N}$
On note

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n$$

On cherche à calculer S_n en fonction de n.

Première étape Exprimons S_n en fonction de u_1

Deuxième étape Exprimons $q \times S_n$ en fonction de u_1

Troisième étape Calculons $S_n - q \times S_n$:

Formule plus générale :

Propriété 4

$$\text{Si } q \neq 1 \text{ alors } S_n = \text{Premier terme} \times \frac{1-q^{\text{Nombre de termes}}}{1-q}$$

Exemple :

$2+4+8+\ldots+2^n = 2 \times \dfrac{1-2^n}{1-2} = -2(1-2^n)$

$1+2+4+8+\ldots+2^n = 1 \times \dfrac{1-2^{n+1}}{1-2} = -(1-2^{n+1})$

Donc si on souhaite calculer la somme des multiples de 2 jusqu'à $4096 = 2^{12}$:

$1+2+3+5+\ldots+2^{12} = -(1-2^{13}) = 8191$