Applications du produit scalaire

Première S

L'équipe des professeurs de mathématiques
Lycée Stendhal

"En mathématique, c'est comme dans un roman policier ou un épisode de Columbo: le raisonnement par lequel le détective confond l'assassin est au moins aussi important que la solution du mystère elle-même. »

(*Théorème vivant*, Cédric Villani, éd. Grasset, "

Année 2016-2017

Liste des savoirs et savoir-faire du chapitre :

CODE	INTITULE	Bilan		
		A	EA	NA
	Connaître et savoir utiliser les définition du produit scalaire.			
	Connaître le produit scalaire de deux vecteurs colinéaires.			
	Connaître le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux.			
	Calculer le carré scalaire d'un vecteur.			
	Développer ou factoriser des expressions avec le produit scalaire.			
	Norme d'une somme ou différence de deux vecteurs.			
	Calculer le produit scalaire d'une somme de deux vecteurs par sa diff.			
	Equation cartésienne d'une droite perpendiculaire à une autre.			
	Equation cartésienne d'un cercle.			
	Vecteur normal.			
	Formule de la médiane			
	Formule sde trigonométrie			

Compétences dans tous les chapitres :

INTITULE	Bilan		
	A	EA	NA
Chercher			
Modéliser			
Représenter			
Calculer			
Raisonner			
Communiquer			

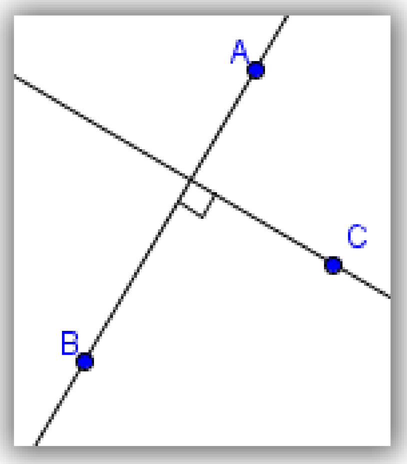
APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

Lycée Stendhal • Première S• M Obaton

Contents

1 Applications

1.1 Equation cartésienne d'une droite perpendiculaire à une autre



Dans un repère orthonormé , on note (AB) la droite passant par $A(x_A, y_B)$ et $B(x_B, y_B)$.
On souhaite trouver une équation de la droite Δ passant par $C(x_C, y_C)$ et perpendiculaire à (AB).

$M \in \Delta \Leftrightarrow$

Il reste donc à utiliser la formulation (5) du produit scalaire pour pouvoir trouver l'équation de la droite Δ.

$M \in \Delta \Leftrightarrow$

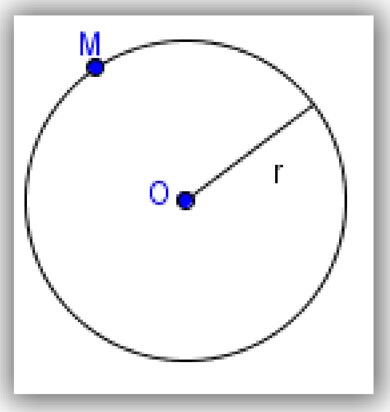
Exemple : Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$ avec $A(-3;2)$ et $B(1;6)$

1.2 Equation cartésienne d'un cercle

On note $\mathscr{C}$ un cercle dans un repère orthonormé et on souhaite trouver l'équation du cercle. C'est à dire la relation entre les abscisses et les ordonnées de tous les points sur le cercle.
Il y a deux cas possibles :

1. Connaissant le centre et le rayon de $\mathscr{C}$
2. Connaissant les coordonnées de deux points diamétralement opposés sur $\mathscr{C}$

1.2.1 Connaissant le centre et le rayon



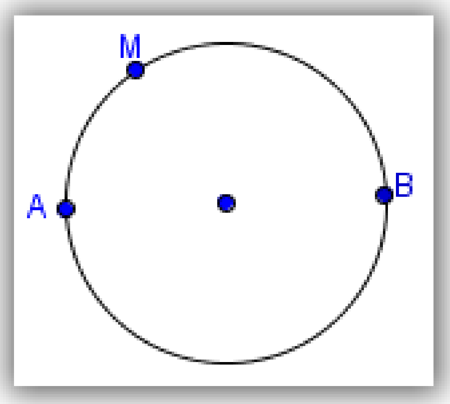
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $O(x_O, y_O)$ et de rayon r. On note $M(x, y)$ un point de $\mathscr{C}$.

$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow$

On obtient donc $\boxed{(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = r^2}$ que l'on nomme une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.

Exemple : Déterminer une équation cartésienne du cercle passant par $A(-3; 2)$ et re dayon $R = 2\sqrt{3}$.

1.2.2 Connaissant deux points diamétralement opposés



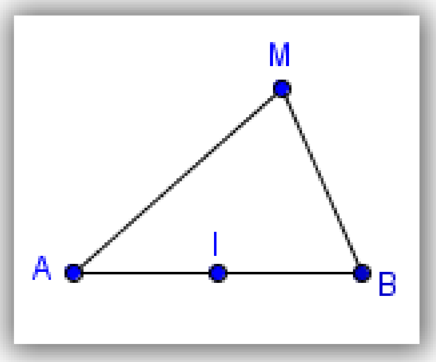
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. On note $M(x, y)$ un point

$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow$

On obtient donc $\boxed{(x_A - x)(x_B - x) + (y_A - y)(y_B - y) = 0}$ que l'on nomme une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.

Exemple : Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(-3; 2)$ et $B(1; 6)$.

1.3 Formule de la médiane



Propriété 1

Si MAB est un triangle et I le milieu de $[AB]$ alors

(1) $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

(2) $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$

(3) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2 = MI^2 - IB^2 = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

Démonstration :

1.4 De nouvelles formules en trigonométrie

1.4.1 Formules d'addition

Propriété 2

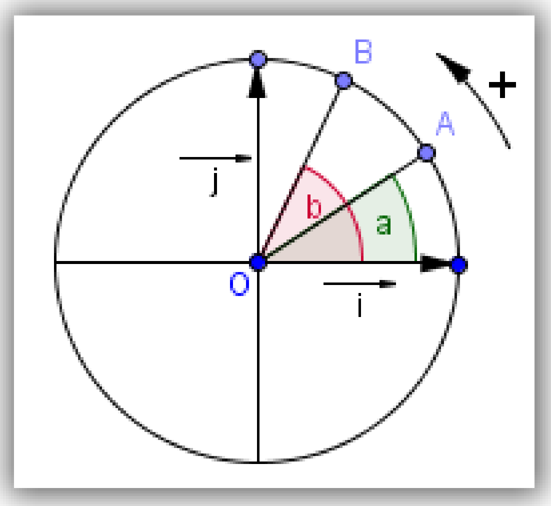
(Formules d'addition)

$\forall a \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$ on a

(1) $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ (2) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

(3) $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$ (4) $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

Démonstration :



➠ Démontrons la formule (1) :
Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ de deux façons différentes :

- A l'aide des coordonnées :

- A l'aide du $\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$:

Conclusion : $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$ on a $\cos(b-a) =$

➠ Démontrons la formule (2) :
Il suffit de reprendre la formule (1) en remplaçant b par $-b$.

➠ Démontrons la formule (3) :
D'après le chapitre précédent, on a $\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(a-b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+b\right)$
donc

➠ Démontrons la formule (4) :
Il suffit de reprendre la formule (3) en remplaçant b par $-b$.

1.4.2 Formules de linéarisation

Dans les formules (2) et (4) précédentes, si on remplace b par a on obtient :

Propriété 3

1. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
2. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

Démonstration :

1.4.3 Formules de duplication

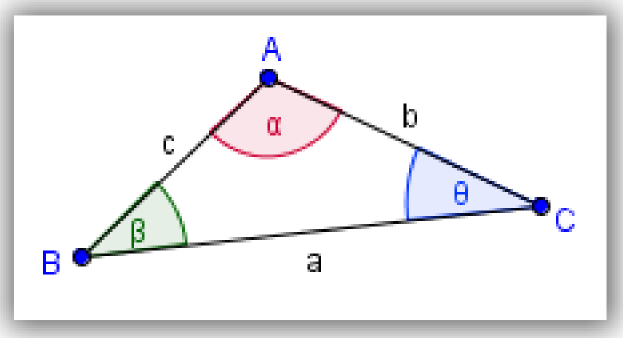
Propriété 4

1. $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
2. $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

Démonstration :

1.5 Pour aller plus loin

1.5.1 Formule d'Al-Kashi



Propriété 5

(Al-Kashi $XIV^{ième}$)
Si ABC est un triangle et si on note $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$,
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \beta$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \theta$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)$$

Démonstration :
Démontrons la première égalité :
$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$
donc $a^2 = b^2 + c^2 - 2AC \times AB \times \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$

1.6 Lignes de niveau

1.6.1 Lignes de niveau du type $MA^2 + MB^2 = k$

On souhaite trouver l'ensemble des points M connaissant A, B et $k \in \mathbb{R}$ tels que $MA^2 + MB^2 = k$.
Pour cela on utilise la formule (1) du théorème de la médiane. On nomme I le milieu de $[AB]$ et donc d'après le théorème de la médiane on a $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$ donc

$MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 = k$

$\Leftrightarrow 2MI^2 = k - \frac{1}{2}AB^2 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2}k - \frac{1}{4}AB^2$

➠ Premier cas : Si $\frac{1}{2}k - \frac{1}{4}AB^2 < 0$ alors il n'y a aucun point M possible donc $E_M = \emptyset$

➠ Deuxième cas :Si $\frac{1}{2}k - \frac{1}{4}AB^2 > 0$ on note $\lambda = \frac{1}{2}k - \frac{1}{4}AB^2$ donc il faut trouver M tel que $MI^2 = \lambda \Leftrightarrow MI = \sqrt{\lambda}$ ou $MI = -\sqrt{\lambda}$ mais la deuxième solution est impossible en géométrie donc $MI = \sqrt{\lambda}$
L'ensemble des points M est donc le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{1}{2}k - \frac{1}{4}AB^2}$.

➠ Troisième cas :Si $\frac{1}{2}k - \frac{1}{4}AB^2 = 0$ alors $MI^2 = 0$ donc $MI = 0$. On a donc $E_M = \{I\}$

1.6.2 Lignes de niveau du type $MA^2 - MB^2 = k$

On souhaite trouver l'ensemble des points M connaissant A, B et $k \in \mathbb{R}$ tels que $MA^2 - MB^2 = k$.
Pour cela on utilise la formule (2) du théorème de la médiane. On nomme I le milieu de $[AB]$ et donc d'après le théorème de la médiane on a $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$ donc $MA^2 - MB^2 = k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = k$
$2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}k \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}k$
On note H le point de (AB) tel que $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}k$
On a alors $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IH}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
Donc l'ensemble des points M est sur la droite perpendiculaire à (AB) et passant par H.
De plus à l'aide de $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}k$ on peut placer le point H sur la droite (AB).

1.6.3 Lignes de niveau du type $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

On souhaite trouver l'ensemble des points M connaissant A, B et $k \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.
Pour cela on utilise la formule (3) du théorème de la médiane. On nomme I le milieu de $[AB]$ et donc d'après le théorème de la médiane on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$ donc
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{1}{4}AB^2$

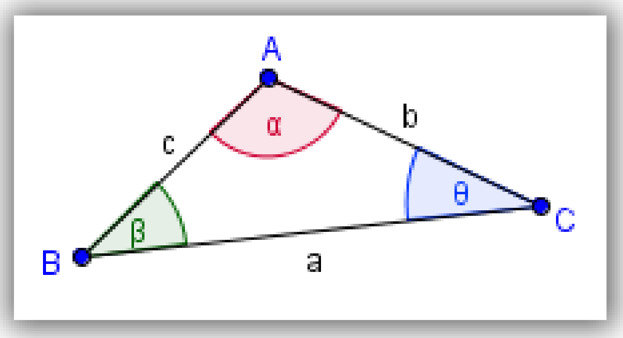
➠ Premier cas : Si $k + \frac{1}{4}AB^2 < 0$ alors il n'y a pas de solution : $E_M = \emptyset$

➠ Deuxième cas :Si $k + \frac{1}{4}AB^2 > 0$ alors on pose $\lambda = k + \frac{1}{4}AB^2$

On a donc $MI^2 = \lambda \Leftrightarrow MI = \sqrt{\lambda}$ ou $MI = -\sqrt{\lambda}$ la deuxième solution étant impossible en Géométrie, on obtient $MI = \sqrt{\lambda}$
Donc l'ensemble des points M est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\lambda}$.

➠ Troisième cas :$k + \frac{1}{4}AB^2 = 0$ alors $MI = 0$ donc $E_M = \{I\}$

1.6.4 Aire d'un triangle



Propriété 6

On note S la surface du triangle ci-dessus, alors :

$$S = \frac{1}{2} bc \sin(\alpha)$$

$$S = \frac{1}{2} ac \sin(\beta)$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin(\theta)$$

Démonstration :
➠ Démontrons la troisème formule :
<u>Si $\widehat{ACH}$ est aigu</u> :
On sait que $S = \frac{1}{2} BC \times AH$
Or dans le triangle AHC rectangle en H on a AH=AC× $\sin(\theta)$ donc $S = \frac{1}{2} ab \sin(\theta)$
<u>Si $\widehat{ACH}$ est obtu</u> :
On a $\sin(\widehat{ACH}) = \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$
donc on obtient la même formule.

1.6.5 Formule des sinus

Propriété 7

Dans le triangle ci-dessus, on a :

$$\frac{abc}{2S} = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\theta)}$$

Démonstration :
On sait d'après le paragraphe précédent que :
$S = \frac{1}{2} bc \sin(\alpha) = \frac{1}{2} ac \sin(\beta) = \frac{1}{2} ab \sin(\theta)$
En multipliant les égalités par $\frac{2}{abc}$ puis en prenant l'inverse, on obtient les bonnes formules.