Le produit scalaire

Première S

L'équipe des professeurs de mathématiques
Lycée Stendhal

"La rigueur vient toujours à bout de l'obstacle "

Léonard de Vinci

Année 2016-2017

Liste des savoirs et savoir-faire du chapitre :

CODE	INTITULE	Bilan		
		A	EA	NA
	Connaître et savoir utiliser les définition du produit scalaire.			
	Connaître le produit scalaire de deux vecteurs colinéaires.			
	Connaître le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux.			
	Calculer le carré scalaire d'un vecteur.			
	Développer ou factoriser des expressions avec le produit scalaire.			
	Norme d'une somme ou différence de deux vecteurs.			
	Calculer le produit scalaire d'une somme de deux vecteurs par sa diff.			
	Equation cartésienne d'une droite perpendiculaire à une autre.			
	Equation cartésienne d'un cercle.			
	Vecteur normal.			
	Formule de la médiane			
	Formule sde trigonométrie			

Compétences dans tous les chapitres :

INTITULE	Bilan		
	A	EA	NA
Chercher			
Modéliser			
Représenter			
Calculer			
Raisonner			
Communiquer			

LE PRODUIT SCALAIRE

Lycée Stendhal • Première S• M Obaton

Contents

1 Définition et Propriétés

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.

1.1 Définition du produit scalaire

Définition 1

On appelle **produit scalaire** des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre réel noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$$

Remarque :
➠ Si l'un des vecteurs est nul alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

1.2 Produit scalaire et commutativité

Propriété 1

$$\forall \overrightarrow{u}, \forall \overrightarrow{v} \text{ on a } \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$$

Démonstration :

1.3 Produit scalaire et vecteurs colinéaires

Propriété 2

On note $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires.
Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$.

► Si $\lambda > 0$ ($\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le même sens) alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \|$

► Si $\lambda < 0$ ($\overrightarrow{u}$ dans le sens contraire de $\overrightarrow{v}$) alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = - \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \|$

Démonstration :

Propriété 3

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, alors

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Démonstration :

Définition 2

On nomme **carré scalaire de** $\vec{u}$ le nombre réel noté $\vec{u}^2$ tel que

$$\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \| \vec{u} \|^2$$

2 Interprétation géométrique

On note $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
Soient O, A et B trois points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$

2.1 Définition géométrique du produit scalaire

Définition 3

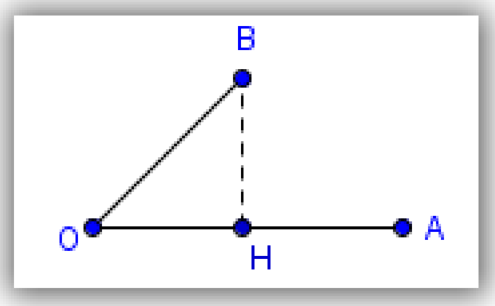
(Autre définition du produit scalaire)

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$$

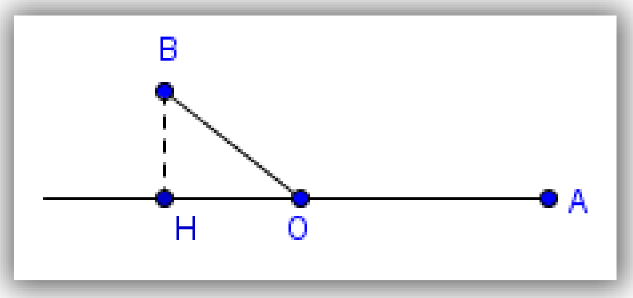
où $\overrightarrow{OH}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{OB}$ sur (OA)

Démonstration :

➠ Premier cas :



➠ Deuxième cas :



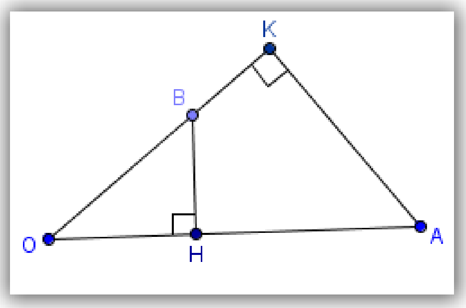
2.2 Retour aux propriétés du produit scalaire

2.3 Remarques et exemples

Propriété 4

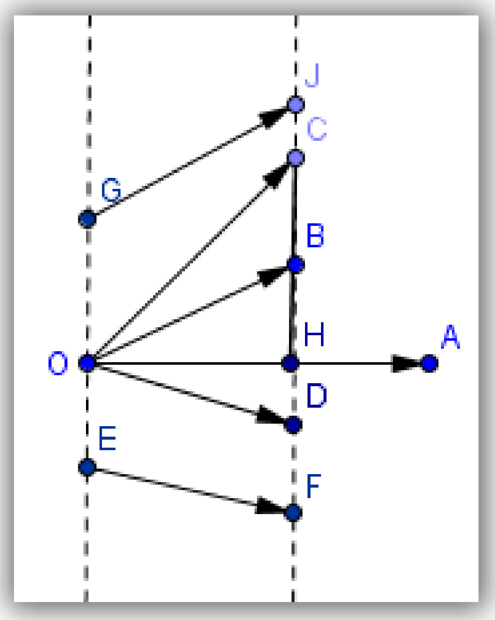
Si $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ alors le projeté orthogonal de B sur (OA) est 0 donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$

Propriété 5



$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OK}$
donc d'après la propriété 1 on a $\boxed{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OK}}$

Remarque :



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}\\ &= \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\\ &= \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}\\ &= \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{EF}\\ &= \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{GJ}\end{aligned}$$

3 Produit scalaire et opérations

3.1 Distributivité du produit scalaire

Propriété 6

(A admettre)
On note $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs.

$$\begin{aligned}&(1)\ \overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}\\ &(2)\ (\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})\cdot\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}\end{aligned}$$

3.2 Linéarité du produit scalaire

Propriété 7

On note $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et α un réel

$$\begin{aligned}&(1)\ \overrightarrow{u}\cdot(\alpha\overrightarrow{v}) = \alpha\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\\ &(2)\ (\alpha\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\end{aligned}$$

Démonstration :

3.3 Autres définitions du produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

Propriété 8

$$(1)\ \| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$(2)\ \| \vec{u} - \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$(3)\ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \| \vec{u} \|^2 - \| \vec{v} \|^2$$

Démonstration :

A l'aide des formules (1) et (2) nous pouvons définir le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de la façon suivante :

Propriété 9

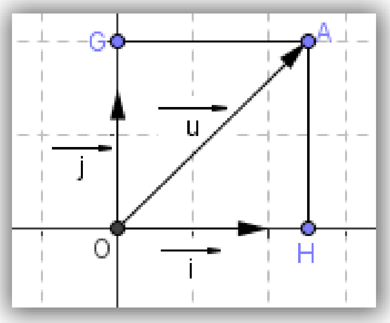
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left[\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} \|^2 - \| \vec{v} \|^2\right]$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left[\| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} - \vec{v} \|^2\right]$$

4 Expression analytique du produit scalaire

$(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un repère orthonormal et les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$

4.1 Coordonnées d'un vecteur



On a $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{i} \cdot x_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{i} = x_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = x_{\overrightarrow{u}}$
et
$\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{j} \cdot y_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{j} = y_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = y_{\overrightarrow{u}}$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ sont $(\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{u} ; \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{u})$

4.2 Expression analytique d'un produit scalaire

Propriété 10

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x \times x' + y \times y'$$

Démonstration :

5 Les différentes expressions du produit scalaire

Voilà donc les différentes expressions que l'on peut utiliser pour exprimer le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

Propriété 11

(1) $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

(2) Si $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$
avec $\overrightarrow{OH}$ le projeté orthogonal de $\overrightarrow{OB}$ sur (OA)

(3) $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$$

(4) $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right]$$

(5) Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ si les vecteurs ont pour coordonnées
$\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$