Géométrie plane (vecteurs et droites)

Première S

L'équipe des professeurs de mathématiques
Lycée Stendhal

"Si vous prenez le mauvais train, il est inutile d'arpenter les couloirs dans la bonne direction. "

Dietrich Bonhoeffer (écrivain et résistant au nazisme)

Année 2016-2017

Liste des savoirs et savoir-faire du chapitre :

CODE	INTITULE	Bilan		
		A	EA	NA
	Reconnaître des vecteurs colinéaires			
	Démontrer que des points sont alignés ou des droites parallèles			
	Reconnaître un vecteur directeur d'une droite.			
	Trouver une équation cartésienne de droite.			
	Trouver une équation réduite de droite.			
	Résoudre des problèmes avec des droites.			

Compétences dans tous les chapitres :

INTITULE	Bilan		
	A	EA	NA
Chercher			
Modéliser			
Représenter			
Calculer			
Raisonner			
Communiquer			

GEOMETRIE PLANE (VECTEURS ET DROITES)

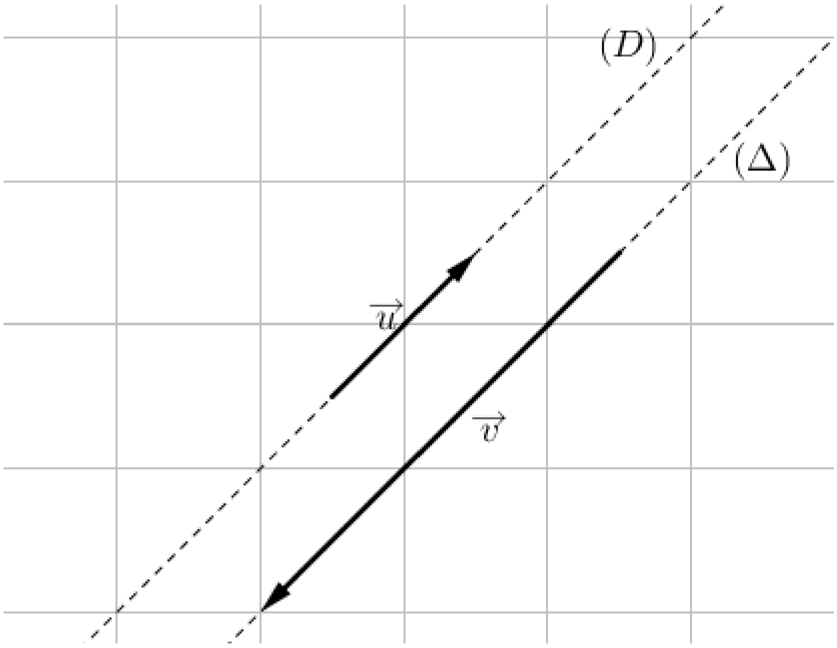
Lycée Stendhal • Première S• M Obaton

Table des matières

1 Vecteurs colinéaires

1.1 Définition

Deux vecteurs, non nuls, sont dit **colinéaires** lorsqu'ils ont la même direction.
On dit alors que les droites supports des vecteurs sont parallèles.



Attention au vocabulaire : On dit que des droites sont parallèles et que des vecteurs sont colinéaires.

Deux vecteurs, non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, sont dit **colinéaires**
si et seulement si
il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = k.\overrightarrow{v}$

1.2 Critère de colinéarité

Propriété : Critère de colinéarité dans un repère

On se place dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Deux vecteurs, non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, sont dit **colinéaires** si et seulement si

$$xy' - x'y = 0$$

Démonstration :

On note $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ deux vecteurs <u>non colinéaires</u> du plan.

(O, i, j) forment un repère du plan et

pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan, il existe deux réels a et b tels que

$$\overrightarrow{u} = a.\overrightarrow{i} + b.\overrightarrow{j}$$

Quelques rappels :
On note $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère du plan.

$$A(x_A; y_A) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$$

$$A(x_A; y_A) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = x_A.\overrightarrow{i} + y_A.\overrightarrow{j}$$

$$A(x_A; y_A) \text{ et } B(x_B; y_B) \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$A(x_A; y_A) \text{ et } B(x_B; y_B) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A).\overrightarrow{i} + (y_B - y_A).\overrightarrow{j}$$

Si le repère est orthogonal :

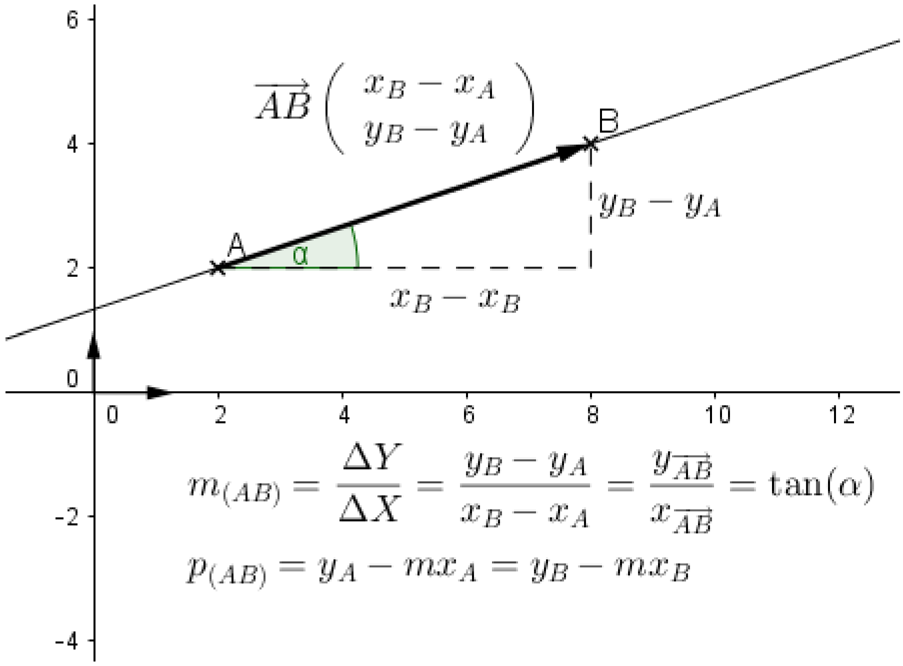
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{x^2_{\overrightarrow{AB}} + y^2_{\overrightarrow{AB}}}$$

Exemple :
On note $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ un repère. A le point de coordonnées $(-2; 3)$ et $\overrightarrow{OB} = 3.\overrightarrow{i} - 4.\overrightarrow{j}$
Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$ et exprimer $\overrightarrow{OA}$ puis $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.

2 Equation de droite

2.1 Equation réduite

En seconde nous avons vu que toutes les droites du plan ont une équation réduite de la forme $y = mx + p$ ou $x = k$.
m se nomme le coefficient directeur de la droite (ou la pente de la droite) et p se nomme l'ordonnée à l'origine.



Exemple :
Déterminer l'équation réduite de la droite passant par $A(-2; -1)$ et $B(1; 2)$.

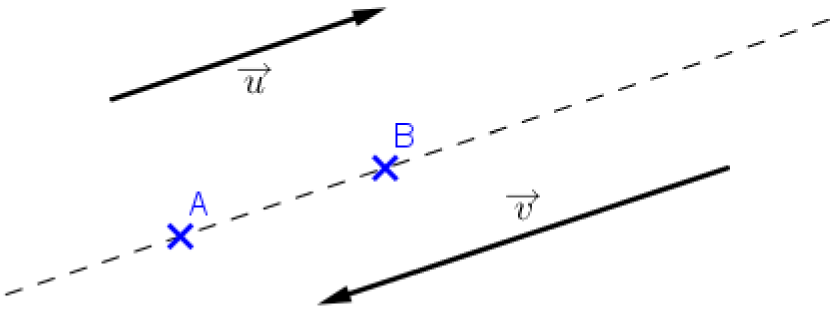
2.2 Vecteur directeur d'une droite

Définition :

On nomme **vecteur directeur** d'une droite (D)

tout vecteur dont la direction est la droite (D).

Une droite (D) a une infinité de vecteurs directeurs.



Propriété :

Si $\overrightarrow{u}$ est un **vecteur directeur** d'une droite (D)

alors tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{u}$ est directeur de la droite (D)

Propriété :

Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

est un vecteur directeur de la droite d'équation réduite $y = mx + p$

Démonstration :

2.3 Equation cartésienne d'une droite

Théorème :

1. Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$

   où a, b et c sont des réels tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

2. Toute relation de la forme $ax + by + c = 0$ (où a, b et c sont des réels

   tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$) est une équation de droite.

Définition :

Une équation de la forme $ax + by + c = 0$ (où a, b et c dont des réels tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$) se nomme **équation cartésienne** de droite.

Démonstration du théorème :

Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de

la droite d'équation $ax + by + c$ (où a, b et c sont des réels tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$)

Démonstration :

Comment trouver l'équation cartésienne d'une droite connaissant un point et un vecteur directeur ?

Méthode 01 :

On souhaite trouver l'équation cartésienne de la droite passant par $A(-2; -1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Méthode 02 :

On souhaite trouver l'équation cartésienne de la droite passant par $A(-2; -1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$