Fonctions polynômes du second degré

Première S

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Année 2018-2019

Liste des savoirs et savoir-faire du chapitre :

INTITULE	Bilan		
	A	EA	NA
Trouver la forme développée			
Trouver la forme factorisée			
Trouver la forme canonique			
Déterminer les racines d'une fonction polynôme du second degré			
Déterminer les racines en se ramenant à du second degré (ex : bicarrée)			
Déterminer le signe d'une fonction polynôme du second degré			
Dresser le tableau des signes d'une expression plus complexe.			
Résoudre un problème se ramenant à une équation du second degré			
Décrire les variations d'une fonction polynôme du second degré			
Décrire la courbe d'une fonction polynôme du second degré			
Tracer correctement l'allure de la courbe d'une fonction du second degré			

Compétences dans tous les chapitres :

INTITULE	Bilan		
	A	EA	NA
Chercher			
Modéliser			
Représenter			
Calculer			
Raisonner			
Communiquer			

FONCTIONS POLYNOMES DU SECOND DEGRE

Lycée Stendhal • Première S• M Obaton

1 Objectifs

L'objectif de ce chapitre est de maîtriser parfaitement les fonctions polynômes du second degré, différentes formes, racines du polynôme, signes du polynômes, tableaux des variations et courbes représentative. il faut ensuite savoir utiliser ces nouvelles connaissances dans des exercices plus complets et en ayant encore vos connaissances de seconde sur les fonctions de référence.

2 Les fonctions du second degré

2.1 Définition

Les fonctions polynômes du second degré sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{f : x \longmapsto ax^2 + bx + c \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* \text{ , } b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

Exemples :

1. $f : x \longmapsto x^2$ (forme ....)

   $a = \ldots\ldots b = \ldots\ldots c = \ldots\ldots \alpha = \ldots\ldots \beta = \ldots\ldots x_1 = \ldots\ldots x_2 = \ldots\ldots$

2. $f : x \longmapsto 4x^2 + 5x - 7$ (forme ....)

   $a = \ldots\ldots b = \ldots\ldots c = \ldots\ldots \alpha = \ldots\ldots \beta = \ldots\ldots x_1 = \ldots\ldots x_2 = \ldots\ldots$

3. $f : x \longmapsto 4(x-2)^2 + 5$ (forme ....)

   $a = \ldots\ldots b = \ldots\ldots c = \ldots\ldots \alpha = \ldots\ldots \beta = \ldots\ldots x_1 = \ldots\ldots x_2 = \ldots\ldots$

4. $f : x \longmapsto -3(x-1)(2+x)$ (forme ....)

   $a = \ldots\ldots b = \ldots\ldots c = \ldots\ldots \alpha = \ldots\ldots \beta = \ldots\ldots x_1 = \ldots\ldots x_2 = \ldots\ldots$

5. $f : x \longmapsto (x+1)^3 - x^3$ (forme ....)

   $a = \ldots\ldots b = \ldots\ldots c = \ldots\ldots \alpha = \ldots\ldots \beta = \ldots\ldots x_1 = \ldots\ldots x_2 = \ldots\ldots$

6. $f : x \longmapsto \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$ (forme ....)

   $a = \ldots\ldots b = \ldots\ldots c = \ldots\ldots \alpha = \ldots\ldots \beta = \ldots\ldots x_1 = \ldots\ldots x_2 = \ldots\ldots$

2.2 Domaine de définition

donc $\boxed{D_f = \ldots\ldots\ldots}$

2.3 Les différentes formes

Les fonctions polynômes du second degré peuvent avoir plusieurs formes :

1. Forme développer : $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$
2. Forme factorisée : $f : x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ (Cette forme n'existe pas toujours)
3. Forme canonique : $f : x \longmapsto a(x - \alpha)^2 + \beta$

Vous devez êtres capable de passer de l'une à l'autre sans problème.

Démontrons que toutes les fonctions polynômes du second degré peuvent se mettre sous la forme canonique :

Réciproquement, si $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$
montrons qu'on peut le mettre sous forme développée

Conclusion
Tous les polynômes du second degré peuvent se mettre sous la forme canonique, il existe donc $a \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

1. Exemple pour déterminer la forme développée à partir de la forme factorisée ?
   C'est simple il suffit de développer l'expression !
   $f(x) = 2(3 - x)(x + 2)$ définie sur $\mathbb{R}$

2. Exemple pour déterminer la forme développée à partir de la forme canonique ?
   C'est simple il suffit de développer l'expression !
   $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$ définie sur $\mathbb{R}$

3. Exemple pour déterminer la forme canonique à partir de la forme développée ?
   Il y a plusieurs méthodes possibles et l'on va en donner trois :

   (a) En utilisant le même méthode que lors de la dernière démonstration.
   On utilise le début d'une identité remarquable.
   $f(x) = 4x^2 - 4x + 4$ définie sur $\mathbb{R}$

   (b) En utilisant l'identification entre la forme que l'on souhaite et la forme que l'on a
   $f(x) = 4x^2 - 4x + 4$ est la forme développée.
   On souhaite trouver la forme canonique : $f(x) = 4(x - \alpha)^2 + \beta$ définie sur $\mathbb{R}$
   On développe la forme canonique et on identifie ave la forme factorisée.

(c) Il suffit d'utiliser la formule : $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$

$f(x) = 4x^2 - 4x + 4$ est la forme développée.

4. Exemple pour déterminer la forme canonique à partir de la forme factorisée ?
Le plus simple est de développer et de faire comme dans le paragraphe précédent.

5. Exemple pour déterminer la forme factorisée à partir de la forme canonique ?
Ce n'est possible dans $\mathbb{R}$ que si β et a ne sont pas de même signe sinon on ne peut pas factoriser dans l'ensemble des réels.
Exemple : $f(x) = 4(x-2)^2 - 16$

6. Exemple pour déterminer la forme factorisée à partir de la forme développée ?
Il faut soit factoriser avec les méthodes classiques soit passer par la forme canonique, mais ce n'est pas toujours possible dans l'ensemble des réels.
Exemple 01 : $f(x) = 4x^2 - 16x$

Exemple 02 : $f(x) = 8x^2 - 32$

Exemple 03 :
$f(x) = 2x^2 - 4x - 6$

2.4 Variation et courbe représentative (Rappels de seconde)

2.4.1 Tableau des variations

Ce paragraphe a déjà été abordé en seconde donc je vais redonner les résultats.
On utilise la forme canonique :

$$f : x \longmapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Il y a deux cas à prévoir : Soit $a > 0$ ou $a < 0$
Résultats de seconde : (A connaître par coeur)

1. Si $a > 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			β		

   β est donc le minimum de f atteint pour $x = \alpha$

2. Si $a < 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
			β		
f		$\nearrow$		$\searrow$	

   β est donc le maximum de f atteint pour $x = \alpha$

2.4.2 Représentations graphiques

Ce paragraphe aussi est un résultat de seconde. La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une parabole tournée vers le haut ou vers le bas et dont le sommet est donné par la forme canonique :

$$f(x) = a\,(x-\alpha)^2 + \beta$$

3 Equations et Inéquations du second degré

Vocabulaire :
On note **Racines du polynômes f**, les réels vérifiant :

$$f(x) = 0$$

.
Exemple :
On note $f : x \mapsto 2x^2 - 4x - 6$ une fonction polynômes du second degré.
Déterminer la forme factorisée de f puis les racines du polynômes $f(x)$

3.1 Racines du polynômes

Les racines d'un polynômes f sont les réels x vérifiant $f(x) = 0$. Ce sont les solutions de l'équations $f(x) = 0$.
Approche théorique de la recherche des racines de $f(x)$:
$f(x) = ax^2 + bx + c$
On nomme $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ **le discriminant du polynôme** $f(x)$.
Alors

$$\boxed{f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}$$

Peut-on factoriser la partie $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}$?
Il y a trois cas possibles :

1. Si $\Delta = 0$ c'est déja factorisé !
2. Si $\Delta > 0$ alors on peut factoriser à l'aide d'une identité remarquable.
3. Si $\Delta < 0$ alors on ne peut pas factoriser dans $\mathbb{R}$ car a et sont de même signe.

Etudions les deux cas possibles :

1. Si $\Delta = 0$:

2. Si $\Delta > 0$:

Conclusion : (A connaître par coeur)
On note $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant :

1. Si $\Delta = 0$ alors il y a une seule racine $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$ et $f(x) = a(x - x_1)^2$
2. Si $\Delta > 0$ alors il y a deux racines réels distinctes
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
et
$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$
3. Si $\Delta < 0$ alors il n'y a pas de racine réelle. Attention cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas de racine du tout, mais elles ne sont pas dans $\mathbb{R}$.(Voir terminale)

3.2 Tableau des signes

On note $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$. Étudions le signe de $f(x)$ suivant le signe de Δ :

1. Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$
Dans $\mathbb{R}$ le réel $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ est toujours .... donc le signe de $f(x)$ est le même que celui de ....
Conslusion :

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
$f(x)$		....	0	....	

2. Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a(x - x_2)(x - x_1) = a\left(x - \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$
Si on note $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(x - x_1)$			0		|		
$(x - x_2)$			|		0		
a		....	|	....	|	....	
$f(x)$		....	0	....	0	....	

3. Si $\Delta < 0$ alors $f(x) = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$
   et donc $f(x) = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a^2}\right]$
   Dans les crochets, tous les nombres sont positifs dans $\mathbb{R}$ donc $f(x)$ est du signe de a et ne s'annule pour aucun réel.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		....	

Conclusion : (A connaître par coeur)
On note $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$:

1. Si $\Delta = 0$

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

2. Si $\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(x - x_1)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x - x_2)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
a		Signe de a	|	Signe de a	|	Signe de a	
$f(x)$		Signe de a	0	Signe opposé de a	0	Signe de a	

3. Si $\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	

3.3 Différentes équations

Nous allons appliquer maintenant nos nouvelles connaissances pour résoudre des équations plus complexes.
Nous utiliserons pour beaucoup la méthode du changement de variable.

3.3.1 Equations bicarrées

Les équations bicarrées sont de la forme : $ax^4 + bx^2 + c = 0$
On utilise le changement de variable $t = x^2$ et on remplace x^2 par t dans l'équation :
On obtient alors l'équation : $at^2 + bt + c = 0$! ! Oh, une équation connue ...
Il suffit de trouver les racines de $at^2 + bt + c$ pour trouver les valeurs de t puis ensuite à l'aide de l'équation $x^2 = t$ d'obtenir les valeurs de x.
Exemple :
Résoudre l'équation : $2x^4 + 2x^2 - 24 = 0$

3.3.2 Autres équations

Exemple 01 :
On souhaite résoudre l'équation : $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{x} - 5 = 0$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple 02 :
On souhaite résoudre l'équation : $t - \sqrt{t} - 12 = 0$ sur $\mathbb{R}^+$.