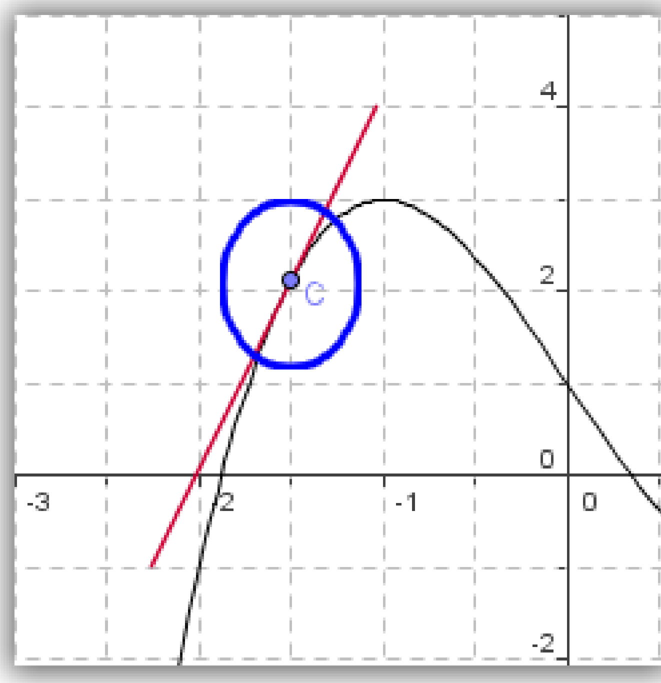
Un approximation affine est une approximation d'une fonction par une application affine.
Au alentours d'un point, on cherche une expression affine $mx + p$ qui est environ égal à $f(x)$.



On sait déjà qu'au alentour d'un point, la courbe et la tangente à la courbe en ce point, sont très proche.
L'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Définition : On note f une fonction dérivable sur I et $a \in I$

Pour tout $a \in I$, on dit que la fonction $x \mapsto f'(a)(x - a) + f(a)$

est une **approximation affine** de f en a.

Et on écrit, pour tout x très proche de a :

$$f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$$

ou

Pour h petit, on a $f(a + h) \approx f'(a)h + f(a)$

Exemple : Soit f la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout x très proche de 3 on a :
$f(x) \approx 6(x - 3) + 9$ donc $f(x) \approx 6x - 9$
Par exemple : $f(3,001) \approx 6 \times 3,001 - 9 = 9,006$
Vérification : $f(3,001) = 3,001^2 = 9,006001$

L'énergie cinétique (aussi appelée dans les anciens écrits vis viva, ou force vive) est l'énergie que possède un corps du fait de son mouvement. L'énergie cinétique d'un corps est égale au travail nécessaire pour faire passer le dit corps du repos à son mouvement de translation et de rotation actuel.

➠ D'après la théorie de la relativité inventée par le physicien Albert Einstein (1879-1955), l'énergie cinétique d'un corps en mouvement est donnée par la formule :

$$E_c = (\gamma - 1)m_0c^2 \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

où c est la vitesse de la lumière, v la vitesse du corps et m_0 la masse du corps au repos.

➠ D'après la théorie inventée par la mathématicien-Physicien Galileo Galilei (Galilée 1564-1642) :

$$E_c = \frac{1}{2}m_0v^2$$

où v la vitesse du corps et m_0 la masse du corps au repos.

✣ ✣ ✣ ✣

Nous allons montrer que lorsque v est très petite devant c alors la formule de Galilée est une approximation de celle d'Einstein.

1. Préliminaires :
On considère la fonction f définie sur $I =]-\infty; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

a. Démontrer que $\forall a \in \mathbb{R}^+$ $\forall b \in \mathbb{R}^+$ alors $a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$

b. Déterminer le taux de variation de f entre h et 0.

c. Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$

d. En déduire l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse 0.

e. En déduire une approximation affine de f en un point très proche de 0.

2. Application :

a. Que peut-on dire de $\dfrac{v^2}{c^2}$ lorsque v est très petite devant c ?

b. En déduire que $\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx \dfrac{1}{2}\dfrac{v^2}{c^2} + 1$

c. En déduire que si v est très petite devant c alors $E_c \approx \dfrac{1}{2}m_0v^2$