La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.
Durée : 2 heures / Calculatrice autorisée : **Oui <u>mais celle du lycée</u>**.

## Exercice 01 : (6 points)

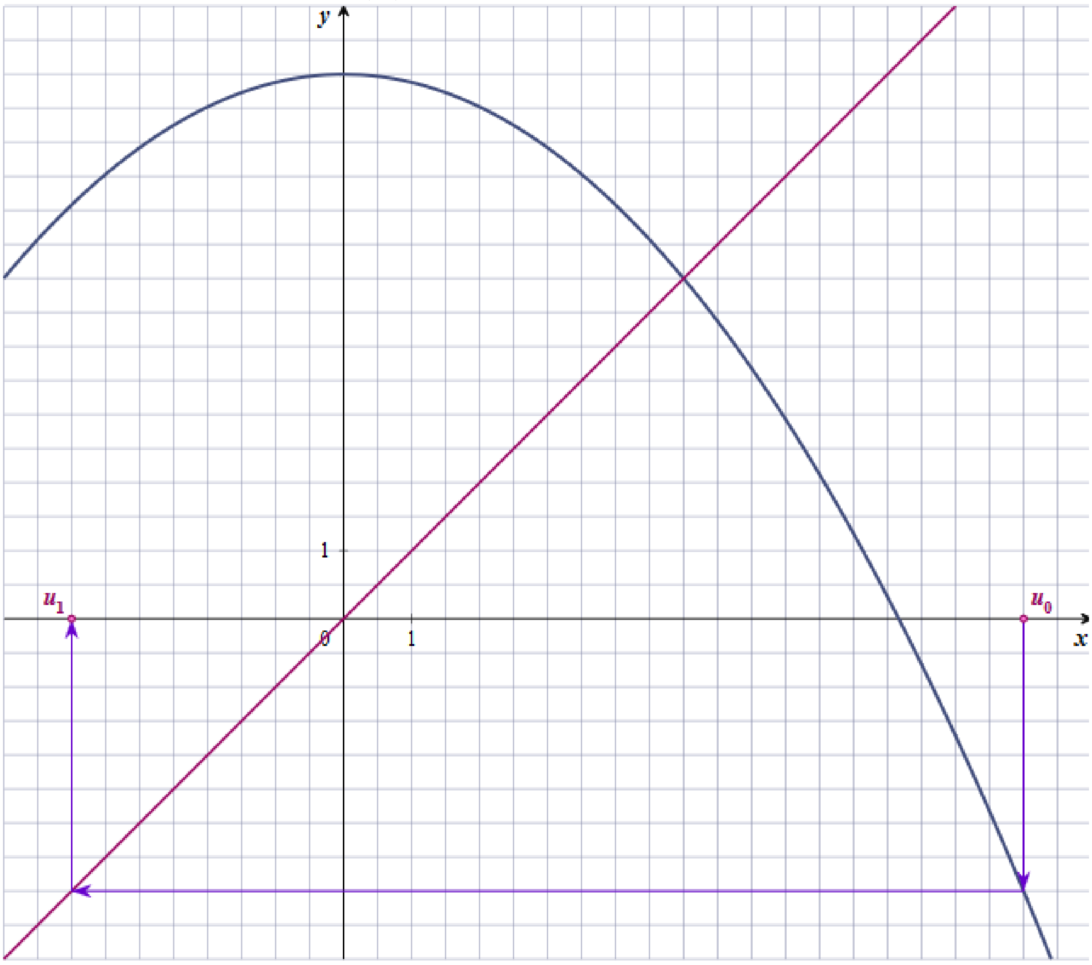
Etudier les variations des suites ci-dessous :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{2^{n-1}}{n}$
2. $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -u_{n-1}^2 + 5u_{n-1} - 4$,
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 5n + 6$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(-1)^n$

## Exercice 02 : (3 points)

Soit $(u)$ la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} = 8 - 0,12 \times u_n^2$

1. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé, la courbe de la fonction $f : x \mapsto 8 - 0,12x^2$ et la droite $(D)$ d'équation $y = x$.




Construire sur l'axe des ascisses les termes $u_2$, $u_3$, $u_4$ et $u_5$.

2. La suite $u$ est-elle monotone ?

## Exercice 03 : (3 points)

On note $p$ et $q$ deux suites définies par $p_1 = 3$, $q_1 = 2\sqrt{3}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_{n+1} = \dfrac{2p_nq_n}{p_n + q_n}$ et $p_{n+1} = \sqrt{p_nq_{n+1}}$

1. Voici le tableau des premiers termes de $(p)$ et $(q)$ :

| $n$ | $p_n$ | $q_n$ |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 3,46410162 |
| 2 | 3,10582854 | 3,21539031 |
| 3 | 3,13262861 | 3,15965994 |
| 4 | 3,1393502 | 3,14608622 |
| 5 | 3,14103195 | 3,1427146 |

   Quelles conjectures pouvez-vous faire sur les variations de $(p)$ et $(q)$ puis sur la limite des deux suites ?

2. Compléter l'algorithme ci-dessous, qui demande une valeur de $n$ et qui affiche les deux termes $p_n$ et $q_n$ :

| | |
|---|---|
| **Algorithme 1** | |
| **Déclaration des variables** : | |
| | $P$, $Q$ : Des nombres réels. |
| | $I$, $N$ : Des nombres entiers. |
| **Initialisation** : | |
| | . . . . . . . . . . . . . . . $\mapsto P$ |
| | . . . . . . . . . . . . . . . $\mapsto Q$ |
| | Demander la valeur de $N$ |
| **Traitement** : | |
| Pour $I$ allant de . . . . . . à . . . . . . | Faire |
| | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . |
| | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . |
| Fin du Pour | |
| **Sortie** : | |
| | Afficher la valeur de $P$. |
| | Afficher la valeur de $Q$. |

## Exercice 4 : (5 points)

On note $a$ et $b$ deux réels strictement positifs tels que $0 < a < b$
On considère les suites $(u)$ et $(v)$ définies par : $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

On admet dans tout le problème que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

1. On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| **Algorithme 2** | |
| **Déclaration des variables** : | |
| | $u$, $v$ : Des nombres réels. |
| | $n$, $N$ : Des entiers naturels |
| **Initialisation** : | |
| | Saisir un entier $N$. |
| | Affecter à $u$ la valeur de $a$. |
| | Affecter à $v$ la valeur de $b$. |
| | Affecter à $n$ la valeur de 0. |
| **Traitement** : | |
| Tant que $n < N$ | Faire |
| | Affecter à $n$ la valeur de $n+1$ |
| | Affecter à $u$ la valeur de $(a+b)/2$ |
| | Affecter à $v$ la valeur de $\sqrt{(a^2+b^2)/2}$ |
| | Affecter à $a$ la valeur de $u$ |
| | Affecter à $b$ la valeur de $v$ |
| Fin du Tant que | |
| **Sortie** : | |
| | Afficher la valeur de $u$ et de $v$. |

Compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4$, $b = 9$ et $N = 2$. Les valeurs de $u$ et $v$ seront arrondies au millième.

| $n$ | $a$ | $b$ | $u$ | $v$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 9 | | |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$$

3. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq v_n$$

4. Démontrer que la suite $u$ est croissante.
5. Comparer $v_{n+1}^2$ et $v_n^2$ et en déduire le sens de variation de la suite $v$.

## Exercice 5 : (3 points)

La suite $u$ est définie par $u_1 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1} = \dfrac{u_n(1+u_n)}{1+2u_n}$

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq 1$

1. Montrer que la suite $u$ est décroissante.
2. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{1+u_n}$
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{1}{u_n} - 1$

## Exercice Bonus : (3 points)

On note $u$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = 3 \times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$$

1. Calculer la valeurs exactes des deux premiers termes puis une valeur approchée des deux suivants.
2. Construire un algorihtme qui permet de calculer les valeurs de $u_n$ jusqu'à obtenir que $|u_n - \pi| \leq 10^{-10}$