

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

Durée : 2 heures / Calculatrice autorisée : **Oui mais celle du lycée.**

### Exercice 01 : (4 points)

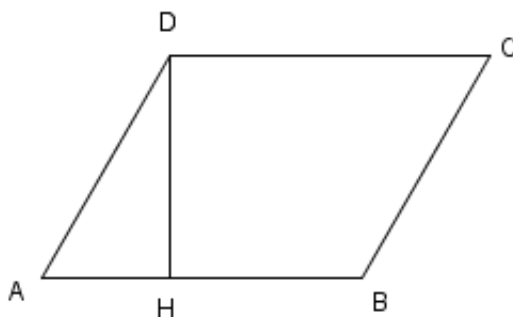
$(O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormé du plan.

Montrer que pour tout vecteur  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  du plan, on a

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
2.  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

### Exercice 02 : (6 points)

$ABCD$  est un parallélogramme tel que  $AD = 4$  cm,  $AB = 5$  cm et  $BD = \sqrt{21}$  cm.  $H$  est le projeté orthogonal de  $D$  sur  $(AB)$ .



1. Déterminer en justifiant :
  - (a)  $\vec{AD} \cdot \vec{BC}$
  - (b)  $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$
  - (c)  $\vec{AB} \cdot \vec{DH}$
2. (a) Montrer en le justifiant, que  $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 10$ .  
 (b) En déduire la mesure principale en radians de l'angle  $(\widehat{\vec{AB}, \vec{AD}})$  et la longueur  $AH$ .
3. Calculer  $AC$ .
4. Déterminer en justifiant  $\vec{CH} \cdot \vec{CB}$

### Exercice 03 : (5 points)

$ABCD$  est un rectangle tel que  $AB = a\sqrt{2}$  et  $AD = a$ , où  $a$  est un réel strictement positif.

1. Calculer les produits scalaires  $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ ,  $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$  et  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
2.  $E$  étant le milieu de  $[AB]$ , démontrer que les droites  $(AC)$  et  $(DE)$  sont perpendiculaires.

**Exercice 4 : (5 points)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{5x - 12}{x^2 + 1}$

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \frac{-5x^2 + 24x + 5}{(x^2 + 1)^2}$
2. Dresser le tableau des variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 5$ , on note  $u_n = \frac{5n - 12}{n^2 + 1}$ 
  - (a) Déterminer les trois premiers termes de la suite  $u$ .
  - (b) Etudier les variations de la suite  $u$ .
  - (c) Que fait l'algorithme ci-dessous :

**Algorithme****Déclaration des variables :** $N$  : un nombre entier positif**Initialisation :** $5 \mapsto N$ **Traitement :**Tant que  $(5 * N - 12) \div (N \wedge 2 + 1) > 0,006$  **Faire** $N + 1 \mapsto N$ Fin du Tant que**Sortie :**Afficher la valeur de  $N$ .

- (d) A l'aide de votre calculatrice (Programme ou tableau des valeurs), donner la valeur affichée par l'algorithme ci-dessus.

**Exercice Bonus :**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_1 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1. Soit  $\alpha$  et  $\beta$  les deux racines de l'équation  $x^2 = x + 1$ .  
Déterminer les valeurs exactes de  $\alpha$  et  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ )
2. Montrer que la suite  $v$  définie par  $a, b \in \mathbb{R}$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = a\alpha^n + b\beta^n$ , vérifie  $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$
3. Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $v_0 = u_0$  et  $v_1 = u_1$ .