La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.
Durée : 2 heures / Calculatrice autorisée : **Oui mais celle du lycée**.

Exercice 01 : (6 points)

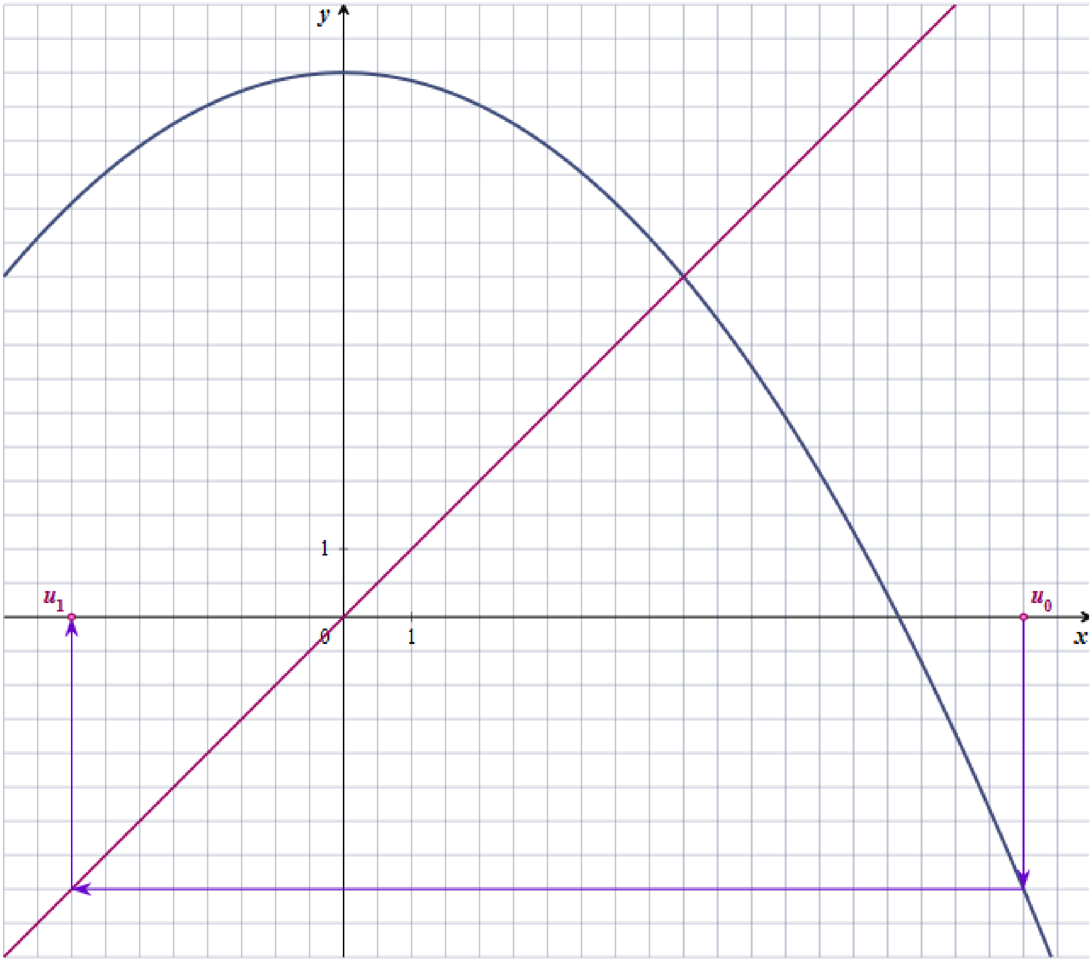
Etudier les variations des suites ci-dessous :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{n}$
2. $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_{n-1}^2 + 5u_{n-1} + 9$,
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -n^2 + 6n - 10$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$

Exercice 02 : (3 points)

Soit (u) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = 8 - 0,12 \times n^2$

1. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé, la courbe de la fonction $f : x \mapsto 8 - 0,12x^2$ et la droite (D) d'équation $y = x$.



   Construire sur l'axe des abscisses les termes u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. La suite u est-elle monotone ?

Exercice 03 : (3 points)

On note p et q deux suites définies par $p_0 = 6$, $q_0 = 4\sqrt{3}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_{n+1} = \dfrac{4p_nq_n}{p_n + q_n}$ et $p_{n+1} = \sqrt{4p_nq_{n+1}}$

1. Voici le tableau des premiers termes de (p) et (q) :

n	p_n	q_n
0	6	6,92820324
1	6,211657	6,43078062
2	6,26525722	6,31931988
3	6,2787004	6,2921724
4	6,2820639	6,285428

   Quelles conjectures pouvez-vous faire sur les variations de (p) et (q) puis sur la limite des deux suites ?

2. Compléter l'algorithme ci-dessous, qui demande une valeur de n et qui affiche les deux termes p_n et q_n :

Algorithme 1
Déclaration des variables :
P, Q : Des nombres réels.
I, N : Des nombres entiers.
Initialisation :
.... $\mapsto P$
.... $\mapsto Q$
Demander la valeur de N
Traitement :
Pour I allant de ...... à ...... Faire
....
....
Fin du Pour
Sortie :
Afficher la valeur de P.
Afficher la valeur de Q.

Exercice 4 : (5 points)

On note a et b deux réels strictement positifs tels que $0 < a < b$
On considère les suites (u) et (v) définies par : $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{4} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{8}}$$

On admet dans tout le problème que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

1. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 2
Déclaration des variables :
u, v : Des nombres réels.
n, N : Des entiers naturels
Initialisation :
Saisir un entier N.
Affecter à u la valeur de a.
Affecter à v la valeur de b.
Affecter à n la valeur de 0.
Traitement :
Tant que $n < N$ Faire
Affecter à n la valeur de $n + 1$
Affecter à u la valeur de $(a + b)/4$
Affecter à v la valeur de $\sqrt{(a^2 + b^2)/8}$
Affecter à a la valeur de u
Affecter à b la valeur de v
Fin du Tant que
Sortie :
Afficher la valeur de u et de v.

Compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4$, $b = 9$ et $N = 2$. Les valeurs de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{4}\right)^2$$

3. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq v_n$$

4. Démontrer que la suite u est croissante.
5. Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2 et en déduire le sens de variation de la suite v.

Exercice 5 : (6 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4
2. Soit α et β les deux racines de l'équation $x^2 = x + 1$.
   Déterminer les valeurs exactes de α et β ($\alpha < \beta$)
3. Montrer que la suite v définie par $a, b \in \mathbb{R}$ et pour tout entier naturel n, $v_n = a\alpha^n + b\beta^n$, vérifie $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$
4. Déterminer a et b pour que $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$.
5. Ecrire un algorithme qui prend en entrée une valeur de n et qui affiche le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.