La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.
Durée : 2 heures / Calculatrice autorisée : **Oui mais celle du lycée**.

NOM : Prénom : Classe :

Exercice 01 : (7 points)

Partie I

Le jeune Vincent obtient des résultats moyens à l'école. Pour le motiver, sa maman lui propose le jeu suivant : à chaque fois qu'il obtient une bonne note, il peut tirer successivement sans remise deux pièces dans un sac contenant 6 pièces de 1 euros et 4 pièces de 2 euros. Si les deux pièces sont de valeurs différentes, il garde ces deux pièces et sa maman complète le sac pour une autre fois. Si les deux pièces sont de même valeur, il remet les deux pièces dans le sac.

Déterminer la probabilité des événements suivants :
A : " Vincent tire deux pièces de 1 euros".
B : " Vincent tire deux pièces de 2 euros".
C : " Vincent tire deux pièces de valeurs différentes".

Partie II

On conserve le principe du jeu de la partie I.
On se propose de faire gagner un peu plus d'argent à Vincent en changeant juste le nombre de pièces de 2 euros dans le sac, le nombre de pièces de 1 euro étant toujours de 6. On suppose qu'il y a n pièces dans le sac dont toujours 6 pièces de 1 euro. ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 10$)

1. Montrer que la probabilité p_C de l'événement "Vincent tire deux pièces de valeurs différentes" est :
$$p_C = \frac{12(n-6)}{n(n-1)}$$
2. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{12(x-6)}{x(x-1)}$ définie sur $[10; +\infty[$. Etudier les variations de f et en déduire les deux valeurs consécutives de n entre lesquelles la fonction f présente son maximum. Donner alors la valeur maximale de p_C.

Exercice 02 : (3 points)

Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi de probabilité est :

$X = x_i$	-4	3	5
$P(X = x_i)$	$0,25$	$0,34$	$0,41$

1. Calculer $E(X)$
2. On note $f : x \longmapsto (x-x_1)^2 P(X = x_1) + (x-x_2)^2 P(X = x_2) + (x-x_3)^2 P(X = x_3)$
   (a) Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
   (b) Déterminer le minimum de f, en quelle valeur il est atteint et ce que représente ce minimum.

Exercice 03 : (3 points)

$X = x_i$	0	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$0,1$	$0,15$	....	0.23	....	$0,25$

On sait que $P(X \geq 4) = 0,6$.

1. Déterminer $P(X < 4)$ sans calculer les données manquantes du tableau.
2. Compléter le tableau ci-dessus en justifiant vos calculs.
3. Déterminer la probabilité que X soit au plus égal à 5.
4. Déterminer la probabilité que X soit au-moins égal à 1.

Exercice 4 : (4 points)

Une urne A contient 1 boule rouge, 2 boules vertes et 3 boules noires
Une urne B contient 5 boules rouges, 2 boules vertes et 1 boule noire.
L'expérience aléatoire consiste à tirer une carte d'un jeu de 32 et de regarder si la carte est une figure. Si la carte est une figure, on doit tirer deux boules, sans remise, de l'urne A, sinon on doit tirer deux boules, avec remise de l'urne B.
Pour jouer, le joueur mise 3 euros au départ.
Si le joueur obtient deux boules de la même couleur alors il gagne 6 euros, sinon il perd 3 euros.
On note X la variable aléatoire qui représente le gain du joueur.

1. Représenter cette expériense par un arbre pondéré.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Déterminer $E(X)$ puis donner une interprétation du résultat.

Exercice 5 : (3 points)

Cet exercice est un QCM. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. On ne demande pas de justifier votre réponses. Une réponse fausse enlève 0.25, une réponse juste rapporte 1 point et une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève rien. Répondre en cochant correctement la bonne réponse.

On note $f : x \longmapsto 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$

1. (Question 01) La fonction f est
   - ❏ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
   - ❏ définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$
   - ❏ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$
   - ❏ définie sur $\mathbb{R}^*_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$
2. (Question 02) la fonction f' est définie par
   - ❏ $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
   - ❏ $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
   - ❏ $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
   - ❏ $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
3. (Question 03) l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est
   - ❏ $y = f'(a)x + f(a)$
   - ❏ $y = f(a)(x - a) + f'(a)$
   - ❏ $y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$
   - ❏ $y = f'(a)(x - a) - f(a)$

Exercice Bonus : (points)

Soient a et b deux nombres réels positifs tels que $a + b = 1$
Quelle est la valeur maximale du produit ab ?