Exercice :

On note f la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4}$

1. $f(x)$ existe si et seulement si $(x-2)^2(x-4)^4 \neq 0$
   $(x-2)^2(x-4)^4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 4$
   Donc $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{2;4\}}$.

2. Recherche de la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

   (a) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2;4\}$

   $$f(x) = \frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \frac{x^2.x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)^2.x^4\left(1-\frac{4}{x}\right)^4} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)^2\left(1-\frac{4}{x}\right)^4}$$

   donc

   $$\boxed{f(x) = \frac{\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^2\left(1-\frac{4}{x}\right)^4}}$$

   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$

   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{2}{x}\right) = 1$

   (d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{4}{x}\right) = 1$

   (e) On a donc
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^3 = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{2}{x}\right)^2 = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{4}{x}\right)^4 = 1$
   On a donc :
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^2\left(1-\frac{4}{x}\right)^4} = 1$

   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+}$$

3. Recherche de la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$

   (a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$

   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1-\frac{2}{x}\right) = 1$

   (c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1-\frac{4}{x}\right) = 1$

   (d) On a donc
   $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^3 = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1-\frac{2}{x}\right)^2 = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1-\frac{4}{x}\right)^4 = 1$
   On a donc :
   $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)^3 = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^2\left(1-\frac{4}{x}\right)^4} = 1$

   $$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-}$$

4. Recherche de la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 2

   (a) On pose $X = x - 2$ et $g(X) = f(X+2)$

   (b) Si x tend vers 2 alors X tend vers 0.

(c) Pour tout $X \in \mathbb{R} \setminus \{0;2\}$

$$g(X) = f(X+2) = \frac{(X+2)^2(X+2+1)^3}{(X+2-2)^2(X+2-4)^4} = \frac{1}{X^2} \times \frac{(X+2)^2(X+3)^3}{(X-2)^4}$$

(d) $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{(X+2)^2(X+3)^3}{(X-2)^4} = \dfrac{2^2 \times 3^3}{(-2)^4} = \dfrac{27}{4}$.

(e) $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{1}{X^2} = +\infty$.

(f) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{X\to 0} g(X) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty}$

5. Recherche de la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 4

(a) On pose $X = x - 4$ et $h(X) = f(X+4)$

(b) Si x tend vers 4 alors X tend vers 0.

(c) Pour tout $X \in \mathbb{R} \setminus \{-2;0\}$:

$$h(X) = f(X+4) = \frac{(X+4)^2(X+4+1)^3}{(X+4-2)^2(X+4-4)^4} = \frac{1}{X^4} \times \frac{(X+4)^2(X+5)^3}{(X+2)^2}$$

(d) $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{(X+4)^2(X+5)^3}{(X+2)^2} = \dfrac{4^2 \times 5^3}{2^2} = 500$.

(e) $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{1}{X^4} = +\infty$.

(f) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{X\to 0} h(X) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 4} f(x) = +\infty}$