Exercice 1 :

1. (a) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = AD \times BC = 16$ car $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires de même sens.
   (b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -25$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires de sens contraire.
   (c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DH} = 0$ car $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DH}$
2. (a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\left(AB^2 + AD^2 - BD^2\right) = 10$
   (b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB \times AD \times cos\widehat{BAD} \Longleftrightarrow cos\widehat{BAD} = \dfrac{1}{2}$ donc $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{3}$
   D'autre part, H étant le projeté orthogonal de D sur(AB),
   $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB \times AH = 10 \Longleftrightarrow AH = 2$
3. $ABCD$ étant un parallélogramme, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, ainsi :
   $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - AD^2\right) \Longleftrightarrow 10 = \dfrac{1}{2}(AC^2 - 41) \Longleftrightarrow AC = \sqrt{61}$
4. $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH}).\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DH}.\overrightarrow{CB}$
   $ABCD$ étant un parallélogramme, $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA}$ donc
   $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AB}.(-\overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{DH}.\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + DH^2$ car H est le projeté orthogonal de A sur (DH).
   Dans ADH rectangle en H, le théorème de Pythagore donne : $DH^2 = AD^2 - AH^2 = 12$ d'où $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB} = 22$

Exercice 2 :

1. Un vecteur directeur de (d_1) est $\vec{v}(3,2)$ et un vecteur normal de (d_1) est $\vec{n}(2,-3)$
2. $\overrightarrow{AB}(-6,2)$
   * $3 \times 2 + 2 \times (-6) = -6 \neq 0$ donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (d_1) et (AB) ne sont pas parallèles.
   * $3 \times (-6) + 2 \times 2 = -14 \neq 0$ donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas orthogonaux donc les droites (d_1) et (AB) ne sont pas perpendiculaires.
3. $M \in \mathscr{D} \Longleftrightarrow (MB) \perp (OA) \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{OA} = 0 \Leftrightarrow 3(-3-x) + 1(3-y) = 0 \Leftrightarrow -9 - 3x + 3 - y = 0 \Leftrightarrow 3x + y + 6 = 0$
   donc une équation cartésienne de $\mathscr{D}$ est : $3x + y + 6 = 0$
4. $M \in \mathscr{C} \Longleftrightarrow MAB$ est rectangle en $M \Longleftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$
   $M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow (3-x)(-3-x) + (1-y)(3-y) = 0 \Leftrightarrow -9 - 3x + 3x + x^2 + 3 - y - 3y + y^2 = 0$
   $M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y - 6 = 0$
   donc une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ est : $x^2 + y^2 - 4y - 6 = 0$.
   Le rayon de $\mathscr{C}$ est $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + 2^2} = \sqrt{10}$
5. $M \in \mathscr{C}' \Longleftrightarrow AM = 2 \Longleftrightarrow AM^2 = 4$ car AM positif.
   $M \in \mathscr{C}' \Longleftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$
   Une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}'$ est : $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$.
6. $\mathscr{C}$: $x^2 + y^2 - 4y - 6 = 0$ et $1^2 + (-1)^2 - 4(-1) - 6 = 0$ donc $M(1;-1)$ est un point de $\mathscr{C}$.
   $\mathscr{D}$: $3x + y + 6 = 0$ et $3 \times 1 + (-1) + 6 = 3 - 1 + 6 = 8 \neq 0$ donc M n'est pas un point de $\mathscr{D}$
7. $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 10 = 0 \Longleftrightarrow (x-4)^2 - 16 + (y+2)^2 - 4 + 10 = 0 \Longleftrightarrow (x-4)^2 + (y+2)^2 = 10$
   Ils'agit du cercle de centre $I(4,-2)$ et de rayon $\sqrt{10}$.

8. $\vec{w}(x;y)$ de norme 2 orthogonal à $\vec{u} \iff \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}=2 \\ \sqrt{3}x-1y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=\sqrt{3}x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+3x^2=4 \\ y=\sqrt{3}x \end{cases}$
$\iff \begin{cases} x^2=1 \\ y=\sqrt{3}x \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \quad ou \quad x=-1 \\ y=\sqrt{3}x \end{cases}$.
Si $x=1$ alors $y=\sqrt{3}$ et si $x=-1$ alors $y=-\sqrt{3}$ ainsi il existe 2 vecteurs de norme 2 orthogonaux à $\vec{u}$:
$\vec{w}_1(1;\sqrt{3})$ et $\vec{w}_2(-1;-\sqrt{3})$

Exercice 3 :

1. $\sum_{i=1}^{5} p(X=x_i)=1 \iff b=1-(0,1+0,25+0,4+0,2)=0,05$
2. $E(X)=\sum_{i=1}^{5} x_i \times p(X=x_i)=0,5 \iff -0,2-0,25+0,4+0,4+0,05a=0,5 \iff a=3$
   $V(X)=\sum_{i=1}^{5}(x_i-E(X))^2 \times p(X=x_i)=2,05$ d'où $\sigma(X)=\sqrt{2,05}\approx 1,432$

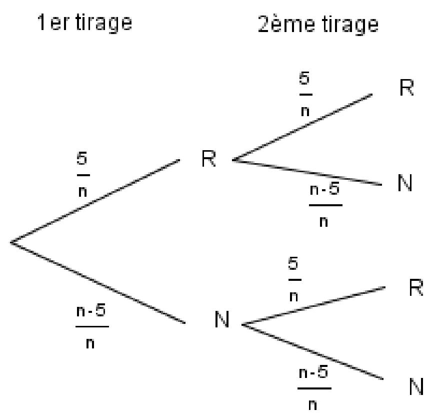
Exercice 4 :

1. X prend les valeurs 245, 45, -3 et -5
2.

x_i	245	45	-3	-5
$p(X=x_i)$	0,01	0,04	0,25	0,7

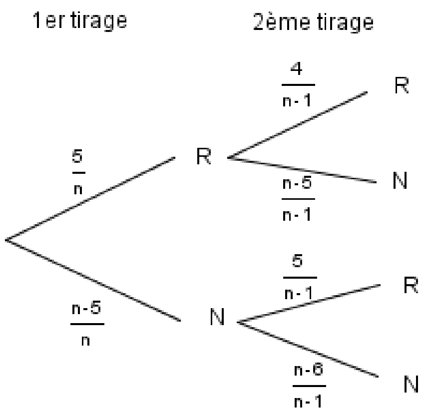
3. $E(X)=0$ signifie que cette tombola est "équitable" : elle n'a pas été conçue pour gagner de l'argent.

Exercice 5 :
Partie A : Tirage avec remise



1.
2. $p(A)=\frac{5}{n}\times\frac{n-5}{n}+\frac{5}{n}\times\frac{n-5}{n}=\frac{10(n-5)}{n^2}$

Partie B : Tirage sans remise



1.

2. (a) D'après l'arbre, $p(X=2)=\dfrac{5}{n}\times\dfrac{n-5}{n-1}+\dfrac{n-5}{n}\times\dfrac{5}{n-1}=\dfrac{10(n-5)}{n(n-1)}$

$p(X=-1)=\dfrac{5}{n}\times\dfrac{4}{n-1}+\dfrac{n-5}{n}\times\dfrac{n-6}{n-1}=\dfrac{n^2-11n+50}{n(n-1)}$

ainsi la loi de probabilité de X est donnée par :

x_i	2	-1
$p(X=x_i)$	$\dfrac{10(n-5)}{n(n-1)}$	$\dfrac{n^2-11n+50}{n(n-1)}$

(b) $E(X)=2\times\dfrac{10(n-5)}{n(n-1)}-\dfrac{n^2-11n+50}{n(n-1)}=\dfrac{20n-100-n^2+11n-50}{n^2-n}=\dfrac{-n^2+31n-150}{n^2-n}$.

(c) Le jeu est équitable équivaut à $E(X)=0 \Longleftrightarrow -n^2+31n-150=0$

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta=361=19^2$

les racines sont : $n_1=\dfrac{-31-19}{-2}=25$ et $n_2=\dfrac{-31+19}{-2}=6$

Pour que le jeu soit équitable, il faut qu'il y ait 5 boules rouges et une noire dans l'urne, ou bien 5 boules rouges et vingt noires dans l'urne.

Exercice bonus :

$E(Y)=E\left(\dfrac{X-m}{\sigma}\right)=E\left(\dfrac{1}{\sigma}X-\dfrac{m}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{\sigma}E(X)-\dfrac{m}{\sigma}=\dfrac{m}{\sigma}-\dfrac{m}{\sigma}=0$

$\sigma(Y)=\sigma\left(\dfrac{1}{\sigma}X-\dfrac{m}{\sigma}\right)=|\dfrac{1}{\sigma}|\sigma(X)=\dfrac{\sigma}{\sigma}=1.$