Exercice 1 :

1. $f(x) = 3x^2 - 12x + 21 = 3(x^2 - 4x + 7) = 3[(x-2)^2 - 4 + 7] = 3[(x-2)^2 + 3]$
2. $a = 3 > 0$ donc la courbe de f est une parabole tournée vers le haut de sommet le point $S(2; f(2))$ soit $S(2; 9)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 2$.

Exercice 2 :

1. $f(x) = -x^2 + 6x - 8$
   $\Delta = 36 - 32 = 4 > 0$ donc f a deux racines : $x_1 = \dfrac{-6-2}{-2} = 4$ et $x_2 = \dfrac{-6+2}{-2} = 2$
   ainsi une factorisation est : $f(x) = -(x-2)(x-4)$.
2. La courbe de f coupe l'axe des ordonnées lorsque $f(x) = 0$ soit lorsque $x = 2$ ou $x = 4$, ainsi la courbe de f coupe l'axe des ordonnées en $A(2; 0)$ et $B(4; 0)$.
   La courbe de f coupe l'axe des abscisses en $C(0; f(0))$ soit en $C(0; -8)$.
3. Le signe de $f(x) - g(x)$ nous donne la position relative des courbes de f et g :
   $f(x) - g(x) = -x^2 + 6x - 8 - (-x + 3) = -x^2 + 7x - 11$ a pour discriminant : $\Delta = 49 - 44 = 5$ et admet donc 2 racines : $x_1 = \dfrac{-7-\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{7+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-7+\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$, ainsi :

x	$-\infty$		$\frac{7-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{7+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
f(x)-g(x)		-	0	+	0	-	
position C_f et C_g		C_f est au-dessous de C_g	|	C_f est au-dessus de C_g	|	C_f est au-dessous de de C_g	

Exercice 3 :

(a) $-2x^2 - 8x - 5 = 0$ $\Delta = 64 - 40 = 24 > 0$ donc l'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{8-2\sqrt{6}}{-4} = -2 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{8+2\sqrt{6}}{-4} = -2 - \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$S = \left\{-2 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}; -2 - \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right\}$

(b) $9(1-x)^2 = 4(2x+1)^2 \iff 9(1-x)^2 - 4(2x+1)^2 = 0 \iff$
$[3(1-x) + 2(2x+1)][3(1-x) - 2(2x+1)] = 0 \iff (x-1)(-7x+1) = 0 \iff$
$x - 1 = 0$ ou $-7x + 1 = 0 \iff x = 1$ ou $x = \dfrac{1}{7}$

$S = \left\{1; \dfrac{1}{7}\right\}$

(c) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{3x-4}{(x-1)(x-2)} = 0$ je résous cette équation sur $\mathbb{R} - \{1; 2\}$

$\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{3x-4}{(x-1)(x-2)} = 0 \iff \dfrac{x(x-2) - (3x-4)}{(x-1)(x-2)} = 0 \iff x^2 - 2x - 3x + 4) = 0 \iff x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$ donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{5-3}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{5+3}{2} = 4$

or je résous cette équation sur $\mathbb{R} - \{1; 2\}$ donc $S = \{4\}$

(d) $\dfrac{(2x^2 + x - 3)(x^2 + 5)}{8 - 4x} \geq 0$ je résous cette inéquation sur $\mathbb{R} - \{2\}$

* $2x^2 + x - 3$ a pour discriminant : $\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$ donc $2x^2 + x - 3$ a 2 racines :

$x_1 = \dfrac{-1-5}{4} = -\dfrac{3}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+5}{4} = 1$

* Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 5 > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x^2+x-3$		+	0	+	0	-		-	
x^2+5		+	|	+	|	+	|	+	
$8-4x$		+	|	+	|	+	0	-	
$\dfrac{(2x^2+x-3)(x^2+5)}{8-4x}$		+	0	-	0	+	||	-	

$S =]-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [1; 2[$

Exercice 4 :

1. $A(x) = 4 \times 10x - 3x^2 + x^2 = 40x - 2x^2$
2. L'aire de la partie blanche vaut $100 - A(x)$ et on veut : $A(x) = 100 - A(x)$
   $A(x) = 100 - A(x) \iff 4x^2 - 80x + 100 = 0 \iff x^2 - 20x + 25 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = 400 - 100 = 300$ et admet donc 2 solutions : $x_1 = \dfrac{20 - \sqrt{300}}{2} = \dfrac{20 - 10\sqrt{3}}{2} = 10 - 5\sqrt{3} > 0$ et $x_2 = \dfrac{20 + \sqrt{300}}{2} = \dfrac{20 + 10\sqrt{3}}{2} = 10 + 5\sqrt{3} > 10$ qui ne convient pas.
   L'aire coloriée est égale à l'aire de la partie blanche pour $x = 10 - 5\sqrt{3}$ cm.

Exercice 5 :

1. Si une fonction polynôme du second degré a 1 et 4 comme racines, alors $f(x) = a(x-1)(x-4)$ où a est un réel non nul.
   Si je choisis a=1 par exemple, j'ai : $f(x) = x^2 - 5x + 4$ est une fonction polynôme du second degré ayant 1 et 4 comme racines.
   Une fonction polynôme du second degré ayant 1 et 4 comme racines est de la forme
   $f(x) = a(x-1)(x-4)$ et je cherche s'il existe un réel a non nul tel que $f(-1) = 1$ pour que la courbe représentative de f passe par le point $A(-1; 1)$:
   $f(-1) = 1 \iff a(-1-1)(-1-4) = 1 \iff 10a = 1 \iff a = \dfrac{1}{10}$
   donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{10}(x-1)(x-4) = \dfrac{1}{10}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{5}$ est une fonction polynôme du second degré ayant 1 et 4 comme racines et dont la courbe représentative passe par le point $A(-1; 1)$
   or pour tout réel a, $a^2 \geq 0$ donc $a^2 + 4 \geq 4 > 0$ donc l'équation $x^2 = ax + 1$ admet deux solutions réelles distinctes.
2. m est un réel, (E) : $(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + (m+3) = 0$ a pour discriminant :
   $\Delta = 4(3m+1)^2 - 4(m+3)^2 = 4(9m^2+6m+1) - 4(m^2+6m+9) = 36m^2+24m+4-4m^2-24m-36 = 32m^2 - 32$
   (E) a une unique solution $\iff \Delta = 0 \iff 32m^2 - 32 = 0 \iff 32(m^2-1) = 0$
   (E) a une unique solution $\iff m = 1$ ou $m = -1$
   Si $m = 1$ la solution de (E) est : $x_0 = \dfrac{-8}{8} = -1$
   Si $m = -1$ la solution de (E) est : $x_0 = \dfrac{4}{4} = 1$.