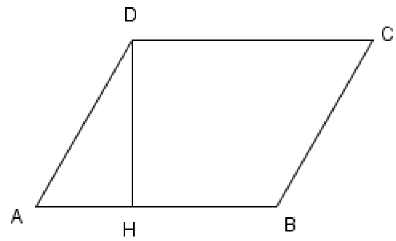
La calculatrice est autorisée pour ce devoir

Exercice 1 : (4 points)
$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AD = 4$ cm, $AB = 5$ cm et $BD = \sqrt{21}$ cm. H est le projeté orthogonal de D sur (AB).



1. Déterminer en justifiant :
   (a) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$
   (b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$
   (c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DH}$
2. (a) Déterminer en justifiant $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.
   (b) En déduire la mesure en radians de l'angle $\widehat{BAD}$ et la longueur AH .
3. Calculer AC.
4. Déterminer en justifiant $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB}$

Exercice 2 : (7 points)
Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les points $A(3;1)$ et $B(-3;3)$, le vecteur $\overrightarrow{u}(\sqrt{3};-1)$, la droite (d_1) d'équation : 2x-3y+1=0.

1. Donner un vecteur directeur de (d_1) et un vecteur normal de (d_1).
2. Les droites (d_1) et (AB) sont-elles parallèles ? perpendiculaires ?
3. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{D}$, hauteur issue de B dans le triangle OAB.
4. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.
   Déterminer le rayon de $\mathscr{C}$.
5. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}'$ de centre A et rayon 2.
6. $M(1;-1)$ est-il un point de $\mathscr{C}$? de $\mathscr{D}$? (justifier).
7. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble des points de coordonnées (x, y) vérifiant : $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 10 = 0$
8. Déterminer les coordonnées du (ou des) vecteur(s) de norme 2 orthogonaux à $\overrightarrow{u}$.

Tourner SVP

Exercice 3 : (2,5 points)
On donne ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	-2	-1	1	2	a
$p(X = x_i)$	0.1	0.25	0.4	0.2	b

1. Déterminer b.
2. Déterminer a sachant que l'espérance mathématique de X vaut 0.5. Calculer alors $\sigma(X)$, vous donnerez la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 10^{-3} près.

Exercice 4 : (2 points)
Une tombola propose 100 billets dont 30 sont gagnants : il y a 1 lot de 250 euros, 4 lots de 50 euros et 25 lots de 2 euros. Un billet est vendu 5 euros. On appelle X la variable aléatoire donnant le "gain" lié à l'achat d'un billet de tombola.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Donner la loi de probabilté de X.
3. Calculer E(X) et interpréter ce nombre.

Exercice 5 : (4,5 points)
Une urne contient 5 boules rouges et $(n-5)$ boules noires numérotées de 1 à n, où $n \geq 5$.

Partie A : Tirage avec remise
Un joueur tire au hasard, successivement et avec remise deux boules de l'urne.

1. Faire un arbre pondéré modélisant la situation.
2. Déterminer en fonction de n la probabilité de l'événement A : "les deux boules sont de couleurs différentes"

Partie B : Tirage sans remise
Un joueur tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1. Faire un arbre pondéré modélisant la situation.
2. Le joueur gagne 2 euros si les deux boules sont de couleurs différentes et perd un euro dans le cas contraire. Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.
   (a) Donner en fonction de n la loi de probabilité de X.
   (b) Montrer que $E(X) = \dfrac{-n^2+31n-150}{n^2-n}$.
   (c) Déterminer la composition de l'urne pour que le jeu soit équitable

Exercice bonus :
X est une variable aléatoire d'espérance m et d'écart-type $\sigma \neq 0$. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$.
Démontrer que $E(Y) = 0$ et $\sigma(Y) = 1$.