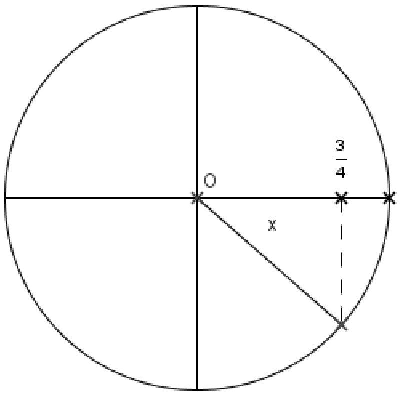
Exercice 1 :



1.

2. Pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \iff \sin^2 x = 1 - \dfrac{9}{16} = \dfrac{7}{16} \iff \sin x = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ ou $\sin x = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

   or $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$ donc $\sin x < 0$ soit $\sin x = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

3. (a) $\sin(\pi - x) = \sin x = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

   (b) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos x = -\dfrac{3}{4}$

   (c) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

Exercice 2 :

1. $\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = 1 \iff \sin^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = 1 - \dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{16} = 1 - \dfrac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{16}$

   $\iff \sin^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{16 - 6 + 2\sqrt{5}}{16} = \dfrac{10 + 2\sqrt{5}}{16}$

   $\iff \sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\dfrac{10 + 2\sqrt{5}}{16}}$ ou $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = -\sqrt{\dfrac{10 + 2\sqrt{5}}{16}}$

   or $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) > 0$ donc $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\dfrac{10 + 2\sqrt{5}}{16}} = \dfrac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$

2. $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\pi}{10}$ donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

3. $4\cos 2x + 1 = \sqrt{5} \iff \cos 2x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} \iff \cos 2x = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$

   $\cos 2x = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) \iff 2x = \dfrac{2\pi}{5} + k \times 2\pi$ ou $2x = -\dfrac{2\pi}{5} + k \times 2\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$

   $4\cos 2x + 1 = \sqrt{5} \iff x = \dfrac{\pi}{5} + k \times \pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{5} + k \times \pi$

   $S = \left\{\dfrac{\pi}{5} + k \times \pi; -\dfrac{\pi}{5} + k \times \pi\right\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 3 :

$(2\sin x+\sqrt{3})(\cos x-1)=0 \iff 2\sin x+\sqrt{3}=0$ ou $\cos x-1=0$

* $2\sin x+\sqrt{3}=0 \iff \sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff x=-\dfrac{\pi}{3}+k\times 2\pi$ ou $x=-\dfrac{2\pi}{3}+k\times 2\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

soit dans $[0;2\pi[$: $\dfrac{4\pi}{3}$ et $\dfrac{5\pi}{3}$

* $\cos x-1=0 \iff \cos x=1 \iff x=0+k\times 2\pi$, soit dans $[0;2\pi[$:0

ainsi dans $[0;2\pi[$, $S=\left\{0;\dfrac{4\pi}{3};\dfrac{5\pi}{3}\right\}$

Exercice 4 :

1. $\pi<3,2$ donc $\pi-3,2<0$ et $|\pi-3,2|=-(\pi-3,2)=3,2-\pi$
2. $|3-2x|=\begin{cases}3-2x & \text{si } 3-2x\geq 0\\ -(3-2x) & \text{si } 3-2x<0\end{cases} \iff |3-2x|=\begin{cases}3-2x & \text{si } x\leq \dfrac{3}{2}\\ 2x-3 & \text{si } x>\dfrac{3}{2}\end{cases}$
3. Pour tout réel x, $(x+1)^2\geq 0$ donc $-3(x+1)^2\leq 0$ et $-3(x+1)^2-2\leq -2<0$ alors $|-3(x+1)^2-2|=-(-3(x+1)^2-2)=3(x+1)^2+2$

Exercice 5 :

1. $|2x-4|=5$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$\lvert 2x-4\rvert$		$4-2x$	0	$2x-4$	
$\lvert 2x-4\rvert=5$		$4-2x=5$	0	$2x-4=5$	
		$x=-\dfrac{1}{2}$	|	$x=\dfrac{9}{2}$	

$S=\left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{2}\right\}$

2. $5-3|x|=6 \iff -3|x|=1 \iff |x|=-\dfrac{1}{3}$ ce qui est impossible donc $S=\emptyset$
3. $|3x-10|\leq 5$

x	$-\infty$		$\dfrac{10}{3}$		$+\infty$
$\lvert 3x-10\rvert$		$10-3x$	0	$3x-10$	
$\lvert 3x-10\rvert\leq 5$		$10-3x\leq 5$	0	$3x-10\leq 5$	
		$-3x\leq -5$	|	$3x\leq 15$	
		$x\geq \dfrac{5}{3}$	|	$x\leq 5$	
		$\dfrac{5}{3}\leq x\leq \dfrac{10}{3}$	|	$\dfrac{10}{3}\leq x\leq 5$	

donc $S=\left[\dfrac{5}{3};5\right]$

4. $|1-x|>3$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\lvert 1-x\rvert$		$1-x$	0	$x-1$	
$\lvert 1-x\rvert>3$		$1-x>3$	0	$x-1>3$	
		$x<-2$	|	$x>2$	

donc $S=]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

Exercice 6 :

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})} = \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$
2. $S(5) = f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$
   $S(5) = \sqrt{1}-\sqrt{0}+\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{4}+\sqrt{6}-\sqrt{5} = -\sqrt{0}+\sqrt{6} = \sqrt{6}$.
3. $S(n) = f(0)+f(1)+...+f(n) = \sqrt{1}-\sqrt{0}+\sqrt{2}-\sqrt{1}+...+\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n+1}$.

Exercice 7 :

On donne $A = \dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$.

1. $A = \dfrac{1}{3+2\sqrt{2}} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{9-8} = 3-2\sqrt{2}$.
2. $(\sqrt{2}-1)^2 = 2-2\sqrt{2}+1 = 3-2\sqrt{2} = A$.
   $A = (\sqrt{2}-1)^2 \iff \sqrt{A} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$ car $\sqrt{2}-1>0$.
3. $A^2 = (3-2\sqrt{2})^2 = 9-12\sqrt{2}+8 = 17-12\sqrt{2}$.
4. (a) Si $0 \le x \le 1$ alors $0 \le x^2 \le x \le \sqrt{x} \le 1$
   Si $x > 1$ alors $1 < \sqrt{x} < x < x^2$
   (b) $\sqrt{2}-1 = \sqrt{A}$, $3-2\sqrt{2} = A$, $17-12\sqrt{2} = A^2$ et comme $\sqrt{2} \approx 1.4$, $A \in [0;1]$ donc
   $0 \le A^2 \le A \le \sqrt{A} \le 1$ soit $17-12\sqrt{2} \le 3-2\sqrt{2} \le \sqrt{2}-1$

Exercice 8 :

Le signe de $f(x)-g(x)$ nous donne la position relative de ces deux courbes.
$f(x)-g(x) = x^2+x-4-(6-2x) = x^2+x-4-6+2x = x^2+3x-10$
$\Delta = 9+40 = 49$ donc le trinôme a 2 racines : $x_1 = \dfrac{-3-7}{2} = -5$ et $x_2 = \dfrac{-3+7}{2} = 2$

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$x^2+3x-10$		+	0	-	0	+	
position C_f et C_g		C_f est au-dessus de C_g	|	C_f est au-dessous de C_g	|	C_f est au-dessus de C_g	

Exercice bonus :

$a > 0$ donc $\sqrt{a}$ existe et $(\sqrt{a})^2 = a$.
$b < 0$, alors $-b > 0$ donc $\sqrt{-b}$ existe et $(\sqrt{-b})^2 = -b$
$ax^2+b = (\sqrt{a})^2x^2-(-b) = (\sqrt{a}\,x)^2-(\sqrt{-b})^2 = (\sqrt{a}\,x-\sqrt{-b})(\sqrt{a}\,x+\sqrt{-b})$ ou encore
$ax^2+b = ax^2-|b| = (\sqrt{a}\,x)^2-(\sqrt{|b|})^2 = (\sqrt{a}\,x-\sqrt{|b|})(\sqrt{a}\,x+\sqrt{|b|})$