

Exercice 1 : (2 pts)

- Voir schéma à la fin de la correction.
- Il semble que la suite ne soit pas monotone et que la limite de la suite soit 3 lorsque n tends vers $+\infty$.
(On peut aussi remarquer que les termes de rang impair sont croissants et les termes de rang pair sont décroissants.)

Exercice 2 : (3,5 pts)

On note v la suite définie par : $v_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_{n-1} - 3n + 4$

- A l'aide de votre calculatrice compléter :

n	0	1	2	3	4	5	6	...	20	21	30
v_n	7	8	6	1	-7	-18	-32	...	-543	-602	-1268

- Déclaration des variables :

p un entier

V un réel

Début de l'algorithme :

$V = 7$

Lire la valeur de p

Pour I allant de 1 à p faire

V reçoit la valeur de $V - 3 \times I + 4$

Fin du Pour

Afficher V

Fin de l'algorithme

- Il semble que la suite (v) soit décroissante à partir du rang 1 et que sa limite est $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_n = -3(n+1) + 4 = -3n - 3 + 4 = -3n + 1 \text{ or } -3n + 1 \leq 0 \Leftrightarrow -3n \leq -1 \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{3} \text{ donc } n \geq 1$$

(v) est donc décroissante à partir du rang 1

Exercice 3 : (5 pts)

On note u , v et t quatre suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = -\frac{2^{n+2}}{3^n}, \quad v_n = -n^2 + 8n - 5 \quad \text{et} \quad t_n = n - 2^n$$

- Variations de u :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } u_{n+1} - u_n = -\frac{2^{n+3}}{3^{n+1}} + \frac{2^{n+2}}{3^n} = \frac{2^{n+2}}{3^n} \left(-\frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{2^{n+2}}{3^{n+1}} > 0$$

Donc u est strictement croissante.

Variations de v :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} - v_n = -n^2 - 2n - 1 + 8n + 8 - 5 + n^2 - 8n + 5 = -2n + 7$ or $-2n + 7 \leq 0 \Leftrightarrow n \geq 4$ donc la suite (v) est décroissante à partir du rang 4.

Variations de t :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} - t_n = n + 1 - 2^{n+1} - n + 2^n = 1 - 2^n(2 - 1) = 1 - 2^n$ or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - 2^n \leq 0$ donc la suite t est décroissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = -\frac{2^{n+3}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{2^{n+2}}{3^n} \right) = \frac{2}{3} u_n$

Donc u est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $u_0 = -4$

- $v_0 = -5$, $v_1 = 2$ et $v_2 = 7$

$v_1 - v_0 = 7$ et $v_2 - v_1 = 5$ donc la suite v n'est pas arithmétique.

$\frac{v_1}{v_0} = -\frac{2}{5}$ et $\frac{v_2}{v_1} = \frac{7}{2}$ donc la suite v n'est pas géométrique.

Exercice 4 : (3 pts)

u est une suite arithmétique telle que $u_5 = 17$ et $u_{12} = 38$

- $u_{12} = u_5 + (12 - 5)r \Leftrightarrow r = \frac{u_{12} - u_5}{7} = \frac{38 - 17}{7} = \frac{21}{7} = 3$

$$u_5 = u_0 + 5r \Leftrightarrow u_0 = u_5 - 5r = 17 - 15 = 2$$

On a donc $u_0 = 2$ et $r = 3$

- $S_{12} = 13 \times \frac{u_0 + u_{12}}{2} = 13 \times \frac{2 + 38}{2} = 260$

Exercice 5 : (2,5 pts)

u est une suite géométrique telle que $u_0 = 6$ et de raison $q = 2$

1. $u_{15} = u_0 \times q^{15} = 6 \times 2^{15} = 196608$
2. $S_{15} = u_0 \times \frac{1 - q^{16}}{1 - q} = 6 \times \frac{1 - 2^{16}}{-1} = 6(2^{16} - 1) = 393210$

Exercice 5 : (4 pts)

1. V_{n+1} est le volume en litres stockés le samedi d'après le $n^{\text{ième}}$ samedi de tonte. On a utilisé ou perdu par décomposition les $3/4$ du volume du samedi précédent donc il reste $\frac{1}{4}V_n$ dans le compost et ensuite on en ajoute 120 litres donc :

$$V_{n+1} = \frac{1}{4}V_n + 120$$

2. On nomme U , la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $U_n = 160 - V_n$

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = 160 - V_{n+1} = 160 - \frac{1}{4}V_n - 120 = -\frac{1}{4}V_n + 40 = \frac{1}{4}(160 - V_n) = \frac{1}{4}U_n$

donc U est géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme $U_1 = 40$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = U_1 \times q^{n-1} = 40 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{40}{4^{n-1}}$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = 160 - U_n = 160 - \frac{40}{4^{n-1}}$

- (d) Le bac de stockage ne sera jamais rempli car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n < 160$.

Figure de l'exercice 1

