La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.
La calculatrice n'est pas autorisée pour ce DS

Exercice 1 : (1,5 pts)

La bonne réponse est le graphique 3.
D'après les variations de f, $f'(x)$ doit être positive pour $x \leq -1$ et $x \geq -1$ puis négative pour $x \in [-1; 2]$. La courbe 1 n'est donc pas possible.
De plus $f'(0) \geq -2$ donc la courbe 3 est la seule possible.

Exercice 2 : (5 pts)

1. f est une fonction polynôme donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:
   $f'(x) = \dfrac{2}{3}(3x^2) - 5(2x) + 3 = 2x^2 - 10x + 3$
2. g est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$
   $g(x) = 3\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) - 4\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$
3. h est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$ et donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$:
   $h(x) = -\dfrac{-3}{(4-3x)^2} = \dfrac{3}{(4-3x)^2}$

Exercice 3 : (2,5 pts)

f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \left(\sqrt{x} - 3\right)\left(2 - \dfrac{1}{x}\right)$
f est la produit de deux fonctions définies et dérivables sur $]0; +\infty[$ donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et
On note $u(x) = \sqrt{x} - 3$ et donc $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
puis $v(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$ et donc $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$
alors

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(2 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\left(\sqrt{x} - 3\right) = \frac{1}{2}\frac{2 - \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} - 3}{x^2}$$

donc

$$f'(x) = \frac{x\sqrt{x}\left(2 - \frac{1}{x}\right)}{2x^2} + \frac{2(\sqrt{x} - 3)}{2x^2} = \frac{\left(2x\sqrt{x} - \sqrt{x}\right)}{2x^2} + \frac{2\sqrt{x} - 6}{2x^2} = \frac{2x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 6}{2x^2}$$

Exercice 4 : (6 pts)

1. f est une fonction rationnelle donc dérivable sur $]3; +\infty[$
   On note $u(x) = x^2 - 5$ alors $u'(x) = 2x$
   puis $v(x) = x - 3$ alors $v'(x) = 1$
   alors
   $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \dfrac{2x(x-3) - (x^2 - 5)}{(x-3)^2} = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2}$

2. Etude de x^2-6x+5 :
$\Delta = b^2-4ac = 16 = 4^2$ donc $\Delta > 0$ et il y a deux racines réelles distinctes :
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6+4}{2} = 5$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6-4}{2} = 1$

x	3		5		$+\infty$
x^2-6x+5		$-$	0	$+$	
$(x-3)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$\searrow$	10	$\nearrow$	

3. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 = 4$ est de la forme :

$$y = f'(4)(x-4) + f(4)$$

donc l'équation est : $y = -3(x-4)+11 = -3x+12+11 = -3x+23$ donc $y = -3x+23$

Exercice 5 : (5 pts)

1. $V(x) = Llh = 2x \times x \times y = 2x^2y$ donc $2x^2y = 72$
On prend $x \neq 0$ pour ne pas avoir un parallélipède rectangle aplati donc :

$$y = \frac{72}{2x^2} = \frac{36}{x^2}$$

2. $S(x) = 2(y\times 2x)+2(x\times y)+2(x\times 2x) = 4yx+2yx+4x^2 = 6yx+4x^2 = 6x\times\dfrac{36}{x^2}+4x^2 = \dfrac{216}{x}+4x^2$
3. S est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ donc aussi sur $]0;12]$
$S'(x) = -\dfrac{216}{x^2}+8x = \dfrac{8(x^3-27)}{x^2}$
or $(x-3)(x^2+3x+9) = x^3+3x^2+9x-3x^2-9x-27 = x^3-27$
donc $S'(x) = \dfrac{8(x-3)(x^2+3x+9)}{x^2}$
4. Le discriminant de x^2+3x+9 est négatif donc son signe est celui de $+1$

x	0		3		12
$8(x-3)$		$-$	0	$+$	
x^2+3x+9		$+$	$\|$	$+$	
x^2		$+$		$+$	
$S'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$S(x)$	$\|\|$	$\searrow$	108	$\nearrow$	

$S(x)$ est minimale pour $x = 3\ mm$ donc les dimensions du paprallélépipède sont : 3 mm, 6 mm et 4 mm